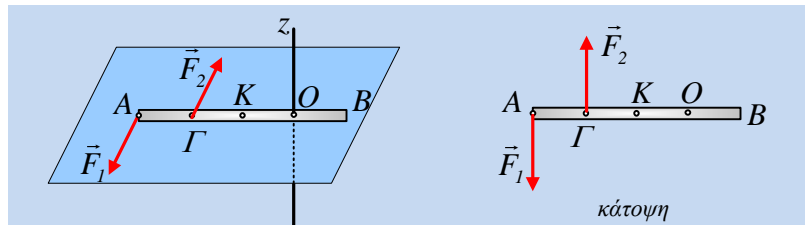


### Η ράβδος, ο άξονας και το ζεύγος δυνάμεων.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια λεπτή ομογενής ράβδος AB, μήκους  $\ell=4\text{m}$  και μάζας  $M=10\text{kg}$ , η οποία μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα z, ο οποίος περνά από ένα σημείο της O, όπου  $(OB)=1\text{m}$ . Σε μια στιγμή  $t_0=0$  ασκούνται πάνω της δυο δυνάμεις  $\vec{F}_1$  και  $\vec{F}_2$ , σταθερού μέτρου  $F_1=F_2=10\pi\text{ N}$  οι οποίες είναι διαρκώς κάθετες στη ράβδο, όπου η πρώτη ασκείται στο άκρο της A, ενώ η δεύτερη σε σημείο Γ, όπου  $(AG)=1\text{m}$ , όπως στο σχήμα (δεξιά σε κάτοψη).



- i) Να υπολογιστεί η γωνιακή επιτάχυνση που θα αποκτήσει η ράβδος.
- ii) Κατά ποια γωνία έχει περιστραφεί η ράβδος και ποια η γωνιακή της ταχύτητα τη χρονική στιγμή  $t_1 = \sqrt{14}\text{ s} \approx 3,7\text{ s}$ .
- iii) Ποιά δύναμη (μέτρο και κατεύθυνση) ασκεί στη ράβδο ο άξονας z τη στιγμή  $t_1$ ;
- iv) Τη στιγμή  $t_1$  ο άξονας σπάει και η ράβδος μπορεί πλέον να κινείται ελεύθερα. Να βρεθεί η θέση της και η γωνιακή της ταχύτητα τη χρονική στιγμή  $t_2=5,7\text{ s}$ .

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της  $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$ .

#### Απάντηση:

- i) Από το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε, αφού υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου, ως προς τον άξονα z, με χρήση του θεωρήματος Steiner:

$$\Sigma\tau = I_o \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot d = \left( \frac{1}{12}M\ell^2 + M(KO)^2 \right) \cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

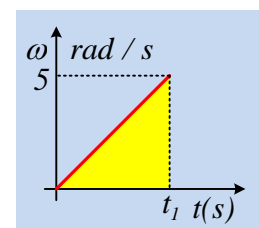
$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{F \cdot \frac{\ell}{4}}{\frac{1}{12}M\ell^2 + M \frac{\ell^2}{16}} = \frac{12F}{7M\ell} = \frac{12 \cdot 10\pi}{7 \cdot 10 \cdot 4} \text{ rad/s}^2 = \frac{3}{7}\pi \text{ rad/s}^2.$$

- ii) Η παραπάνω γωνιακή επιτάχυνση της ράβδου είναι σταθερή, αφού σταθερή είναι και η ροπή του ζεύγους των δύο δυνάμεων. Αλλά τότε:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - 0}{t_1 - 0} \rightarrow$$

$$\omega_1 = a_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 = \frac{3}{7}\pi \cdot 3,7 \text{ rad/s} = 1,6\pi \text{ rad/s} = 5 \text{ rad/s}.$$

Ενώ κάνοντας τη γραφική παράσταση της σχέσης  $\omega = a_{\gamma\omega\nu} \cdot t$ , το εμβαδόν του σχηματιζόμενου χωρίου (τριγώνου με κίτρινο χρώμα), είναι αριθμητικά ίσο



με τη γωνία που διαγράφει η ράβδος.

$$\vartheta = \frac{1}{2} t_1 \omega = \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\omega} t_1^2 = \frac{1}{2} \frac{3}{7} \pi \cdot (\sqrt{14})^2 \text{ rad} = 3\pi \text{ rad}.$$

iii) Τη στιγμή  $t_1$ , με βάση την απάντηση στο παραπάνω ερώτημα, η ράβδος έχει εκτελέσει 1,5 περιστροφή και στο διπλανό σχήμα φαίνεται η θέση της, ενώ το κέντρο μάζας της  $K$ , έχει ταχύτητα:

$$v_{cm} = \omega \cdot R = \omega \cdot \frac{\ell}{4} = 1,6\pi = 5 \text{ m/s}$$

Αλλά τότε το κέντρο μάζας της ράβδου  $K$  έχει μια επιτάχυνση στη διεύθυνση της ταχύτητας, επιτρόχια επιτάχυνση, ίση με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της ταχύτητας:

$$a_{\varepsilon\pi} = \frac{d|v_{cm}|}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R = a_{\gamma\omega\omega} \frac{\ell}{4}.$$

$$a_{\varepsilon\pi} = a_{\gamma\omega\omega} \frac{\ell}{4} = \frac{3\pi}{7} \text{ m/s}^2 \approx 1,3 \text{ m/s}^2$$

Και μια κεντρομόλο επιτάχυνση, υπεύθυνη για την αλλαγή στη διεύθυνση της ταχύτητας, μέτρου:

$$a_{\kappa} = \omega^2 \cdot R = 5^2 \cdot 1 \text{ m/s}^2 = 25 \text{ m/s}^2.$$

Εφαρμόζοντας τώρα το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα για το κέντρο μάζας της ράβδου παίρνουμε:

$$\sum \vec{F} = M \vec{a}_{cm} \Rightarrow \begin{cases} F_x = M \cdot a_x \\ F_y = M \cdot a_y \end{cases}$$

$F_x = M \cdot a_{\kappa} = 10 \cdot 25 \text{ N} = 250 \text{ N}$  και  $F_y = M \cdot a_{\varepsilon\pi} = 10 \cdot 1,3 \text{ N} = 13 \text{ N}$ , οπότε:

$$F_{a_{\xi}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{250^2 + 13^2} \text{ N} \approx 280,3 \text{ N}$$

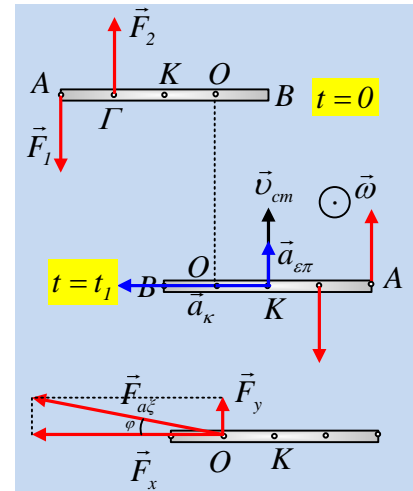
$$\text{Και } \varepsilon\phi\phi = \frac{F_y}{F_x} = \frac{13}{250} = 0,05$$

iv) Μόλις σπάσει ο άξονας, το κέντρο μάζας  $K$  θα κινηθεί πλέον ευθύγραμμα, με σταθερή ταχύτητα  $v_{cm} = v_y = 5 \text{ m/s}$  στην διεύθυνση  $y$ , κάθετα στην αρχική διεύθυνση της ράβδου, αφού η συνισταμένη δύναμη που δέχεται είναι μηδενική. Η μετατόπιση του κέντρου μάζας θα είναι λοιπόν:

$$\Delta y = v_{cm} \cdot (t_2 - t_1) = 5 \cdot 2 \text{ m} = 10 \text{ m}$$

Αλλά αφού ασκείται πάνω της το ζεύγος δυνάμεων, θα συνεχίσει να επιταχύνεται στροφικά εκτελώντας επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, γύρω από κατακόρυφο άξονα ο οποίος περνά από το μέσον της  $K$  (κέντρο μάζας).

$$\Sigma \tau = I_{cm} \cdot a_{\gamma\omega\omega} \rightarrow F \cdot d = \left( \frac{1}{12} M \ell^2 \right) \cdot a_{\gamma\omega\omega} \rightarrow$$



$$a_{1\gamma\omega\nu} = \frac{F \cdot \frac{\ell}{4}}{\frac{I}{12} M \ell^2} = \frac{3F}{M\ell} = \frac{3 \cdot 10\pi}{10 \cdot 4} \text{rad} / \text{s}^2 = \frac{3}{4} \pi \text{rad} / \text{s}^2.$$

$$\text{Αλλά } a_{1\gamma\omega\nu} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_1}{t_2 - t_1} \rightarrow$$

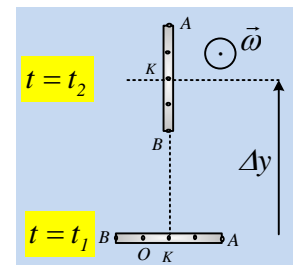
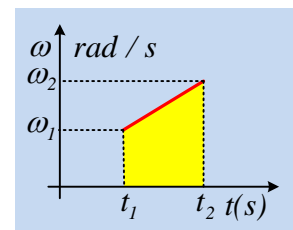
$$\omega_2 = \omega_1 + a_{1\gamma\omega\nu}(t_2 - t_1) \rightarrow$$

$$\omega_2 = \left( 5 + \frac{3}{4} \pi \cdot 2 \right) \text{rad} / \text{s} = 9,7 \text{rad} / \text{s}.$$

Εξάλλου η ράβδος θα έχει περιστραφεί κατά γωνία  $\Delta\varphi$ , ίση με το εμβαδόν του τραπεζιού, του διπλανού πάνω σχήματος:

$$\Delta\varphi = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} (t_2 - t_1) = \frac{9,7 + 5}{2} 2 \text{rad} = 14,7 \text{rad} \approx 4,5\pi \text{ rad}$$

Στο κάτω σχήμα, φαίνονται η αρχική και η τελική θέση της ράβδου (σε.... σμίκρυνση!!!).



### Σχόλια:

- 1) Στον υπολογισμό της γωνιακής μετατόπισης (της γωνίας περιστροφής της ράβδου) χρησιμοποιήσαμε τα εμβαδά στο διάγραμμα  $\omega$ - $t$ . Αυτό μας το επέβαλε η μη απόδειξη στο σχολικό βιβλίο των μαθηματικών εξισώσεων:

$$\omega = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t \text{ και } \Delta\varphi = \omega_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} \cdot (\Delta t)^2$$

εξισώσεις ανάλογες της ταχύτητας και της μετατόπισης της ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης.

- 2) Για όσο χρόνο υπάρχει άξονας, υποχρεώνεται η ράβδος να περιστραφεί γύρω από τον πραγματικό αυτό άξονα. Βέβαια για να συμβαίνει αυτό ο άξονας ασκεί στη διάρκεια της κίνησης δύναμη στην ράβδο, όπως υπολογίστηκε στο δεύτερο ερώτημα. Όταν σπάσει ο άξονας, οπότε δεν μπορεί πλέον να ασκείται η παραπάνω δύναμη, η ράβδος θα στρέφεται γύρω από κάποιον άλλον άξονα, που «δεν θα χρειάζεται να της ασκεί δύναμη». Αλλά αυτός ο άξονας δεν μπορεί παρά να είναι ο άξονας που θα περνά από το κέντρο μάζας, αφού μόνο τότε το κέντρο μάζας, μπορεί να μην έχει επιτάχυνση και δεν απαιτείται να του ασκηθεί καμιά δύναμη. Τέτοιος **πραγματικός** βέβαια άξονας δεν υπάρχει, αλλά τότε η ράβδος στρέφεται γύρω από **νοητό** κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας  $K$ . Και γύρω από αυτόν τον άξονα υπολογίσαμε τη γωνιακή επιτάχυνση και γωνιακή ταχύτητα στο τελευταίο ερώτημα...

### Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια

*Διονύσης Μάργαρης*

