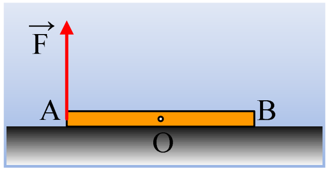
Κατακόρυφη δύναμη σε σανίδα.



Μια ομογενής σανίδα μήκους 2m και μάζας 1kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ασκούμε στο ένα της άκρο Α μια κατακόρυφη δύναμη F=2N και βλέπουμε ότι η σανίδα ισορροπεί.

i) Να υπολογίσετε την δύναμη που ασκεί το επίπεδο στη σανίδα και τη ροπή της ως προς το μέσον Ο της σανίδας.

ii) Αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή F=4N και η ράβδος συνεχίζει να ισορροπεί. Πόσο απέχει ο φορέας της αντίδρασης του επιπέδου από το μέσον Ο της ράβδου;

iii) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της ασκούμενης δύναμης, χωρίς να αρχίσει να σηκώνεται η σανίδα;

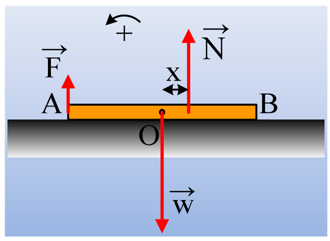
iv) Αυξάνουμε το μέτρο της δύναμης στην τιμή F=6N. Να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση του μέσου Ο της και του άκρου Α της ράβδου.

v) Αν η δύναμη F παραμένει σταθερή, να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια της σανίδας τη στιγμή που σχηματίζει γωνία $\theta=30^{o}$ με το επίπεδο.

vi) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του μέσου Ο και του άκρου Β της σανίδας στην παραπάνω θέση.

Δίνεται $g=10m/s^2$ και η ροπή αδράνειας της σανίδας ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της $I_{cm}=\frac{1}{12}mL^2$.

Απάντηση:



i) Αφού η σανίδα ισορροπεί ΣF=0 → F+N-w=0 → N=w-F=10N-2N=8N. Αλλά και Στ=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο. Ας πάρουμε τις ροπές ως προς το μέσον της ράβδου Ο:

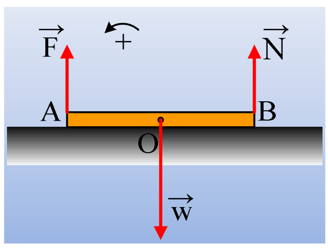
$$\Sigma\tau=0 \rightarrow N\cdot x + w\cdot 0 - F\cdot\frac{L}{2}=0 \rightarrow N\cdot x = F\cdot\frac{L}{2}=2\cdot 1Nm=2Nm$$

άρα και x=0,25m.

Πράγμα που σημαίνει ότι ο φορέας της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου απέχει κατά 0,25m από το μέσον Ο της ράβδου, όπως φαίνεται στο σχήμα.

ii) Αφού η σανίδα ισορροπεί: ΣF=0 → F+N-w=0 → N=w-F=10N-4N=6N. Αλλά και Στ=0, ως προς οποιοδήποτε σημείο. Ας πάρουμε τις ροπές ως προς το μέσον της ράβδου Ο:

$$\Sigma\tau=0 \rightarrow N\cdot x_1 + w\cdot 0 - F\cdot\frac{L}{2}=0 \rightarrow x_1=\frac{F\cdot L}{2N}=0{,}33m$$



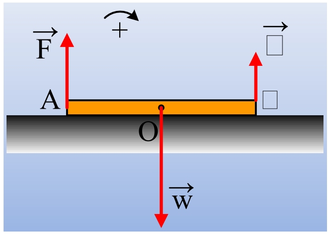
iii) Με βάση τα προηγούμενα παρατηρούμε ότι, όσο μεγαλώνει το μέτρο της ασκούμενης δύναμης, τόσο μετακινείται ο φορέας της κάθετης αντίδρασης απομακρυνόμενος από το μέσον Ο, προς το άκρο Β.

Αλλά η μέγιστη απόσταση στην οποία μπορεί να ασκηθεί η Ν, είναι 1m, φτάνοντας στο άκρο Β, ενώ η σανίδα συνεχίζει να ισορροπεί. Παίρνοντας ξανά τη συνθήκη ισορροπίας έχουμε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F+N-w=0 \rightarrow N=w-F.$$

$$\Sigma\tau_O=0 \rightarrow N\cdot\frac{L}{2}+w\cdot 0-F\cdot\frac{L}{2}=0 \rightarrow w\frac{L}{2}-F\frac{L}{2}-F\frac{L}{2}=0 \rightarrow F=\frac{w}{2}=5N$$

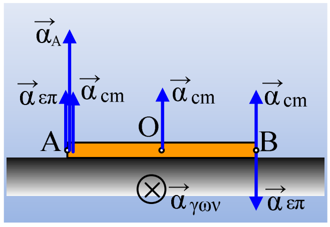
iv) Αφού τώρα η δύναμη έχει μέτρο μεγαλύτερο από 5Ν, η σανίδα κινείται. Θεωρούμαι την κίνησή της σύνθετη αποτελούμενη από μια μεταφορική και μια περιστροφική γύρω από νοητό οριζόντιο άξονα κάθετο στη σανίδα που περνά από το κέντρο μάζας Ο. Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:



Για τη μεταφορική κίνηση: $\Sigma F=m\cdot\alpha_{cm} \rightarrow F+N-w==m\cdot\alpha_{cm}$ (1)

$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F\cdot\frac{L}{2}-N\cdot\frac{L}{2}=\frac{1}{12}mL^2a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F-N=\frac{1}{6}mL\cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Αλλά τότε το άκρο Β έχει μια επιτάχυνση α_{cm} εξαιτίας της μεταφορικής κίνησης και μια επιτρόχια $\alpha_{\varepsilon\pi}$, ίση με το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητα, λόγω της κυκλικής κίνησης γύρω από το Ο. Αλλά το άκρο Β δεν επιταχύνεται (ούτε προς τα πάνω, αφού τότε θα μηδενιζόταν η Ν και θα είχαμε τη ράβδο με βάρος 10Ν να επιταχύνεται προς τα πάνω με άσκηση δύναμης 6Ν, αλλά προφανώς ούτε προς τα κάτω), οπότε $\alpha_N=0$ ή $\alpha_{cm}=\alpha_{\gamma\omega\nu}\frac{L}{2}$ και η εξίσωση (2) γίνεται:



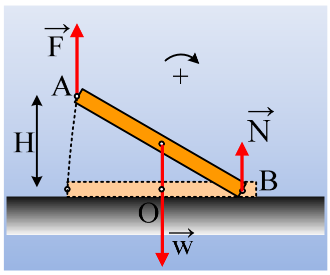
$$F-N=\frac{1}{3}m\cdot a_{cm} \quad (2^\alpha)$$

Με πρόσθεση των (1) και (2$^\alpha$) παίρνουμε: $2F-mg=\frac{4}{3}m\cdot a_{cm} \rightarrow$

$$a_{cm}=\frac{3F}{2m}-\frac{3}{4}g=\frac{3\cdot 6}{2\cdot 1}m/s^2-\frac{3}{4}10m/s^2=1{,}5m/s^2$$

Οπότε η επιτάχυνση του άκρου Α είναι: $\alpha_A=\alpha_{cm}+\alpha_{\gamma\omega\nu}\frac{L}{2}=2\,\alpha_{cm}=3m/s^2$.

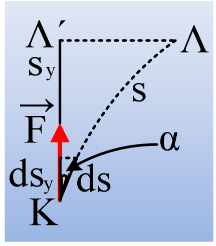
v) Στο σχήμα φαίνεται η σανίδα να σχηματίζει γωνία θ με το οριζόντιο επίπεδο. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε για την κίνηση από την οριζόντια θέση μέχρι αυτή του σχήματος και παίρνουμε:



$$K_{\tau\varepsilon\lambda}-K_{\alpha\rho\chi}=W_F+W_w+W_N \quad (3)$$

Αλλά $W_F=F\cdot H=F\cdot L\cdot\eta\mu\theta$ και $W_w=-mg\cdot\frac{L}{2}\cdot\eta\mu\theta$.

Πράγματι έστω μια σταθερή δύναμη, όπως αυτή που έχουμε εδώ, η οποία ασκείται σε ένα σημείο Α το οποίο διαγράφει καμπύλη τροχιά, ΚΛ. Το έργο dW για μια στοιχειώδη μετατόπιση ds είναι dW=F·ds·συνα = F·ds$_y$, όπου ds$_y$ η προβολή της μετατόπισης ds στη διεύθυνση της δύναμης. Αλλά τότε το συνολικό έργο θα είναι:



$$W_F=\Sigma dW=\Sigma\, F\cdot ds_y=F\cdot \Sigma ds_y=F\cdot s_y,$$

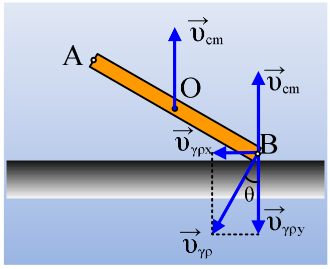
όπου s$_y$=(ΚΛ΄) η προβολή της καμπύλης τροχιάς στην διεύθυνση της σταθερής δύναμης.

Οπότε η (3) δίνει $K_{τελ}= W_F+W_w+W_N =+ F\cdot L\cdotημθ - mg\cdot \frac{L}{2}\cdotημθ+0=6\cdot 2\cdot ½\, J-1\cdot 10\cdot 1\cdot ½\, J=1J$.

vi) Η παραπάνω κινητική ενέργεια μπορεί να γραφτεί:

$$K=\frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2+\frac{1}{2}I\omega^2 \quad (4)$$

Αλλά αν σχεδιάσουμε τις ταχύτητες του άκρου Β θεωρώντας την κίνηση σύνθετη, θα έχουμε το διπλανό σχήμα, όπου $\upsilon_{γρ}=\omega\cdot\frac{L}{2}$. Εξάλλου το άκρο Β δεν κινείται κατακόρυφα, οπότε:



$$\upsilon_{cm}=\upsilon_{γρy}=\omega\cdot\frac{L}{2}συνθ \quad (5)$$

και με αντικατάσταση στην (4) παίρνουμε:

$$K=\frac{1}{2}m\omega^2\frac{L^2}{4}\sigma\upsilon\nu^2\vartheta+\frac{1}{2}\frac{1}{12}mL^2\omega^2\rightarrow\omega=\sqrt{\frac{24K}{mL^2(1+3\sigma\upsilon\nu^2\vartheta)}}\rightarrow$$

$$\omega=\sqrt{\frac{24\cdot K}{mL^2(1+3\sigma\upsilon\nu^2\vartheta)}}=\sqrt{\frac{24\cdot 1}{1\cdot 2^2\left(1+3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)}}rad/s=\sqrt{\frac{24}{13}}rad/s\approx 1{,}36 rad/s$$

Και από την (5) παίρνουμε: $\upsilon_{cm}=\omega\cdot\frac{L}{2}συνθ=\sqrt{\frac{24}{13}}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}m/s=\sqrt{\frac{18}{13}}m/s\approx 1{,}18m/s$

Αλλά και $\upsilon_B=\upsilon_{γρx}=\omega\cdot\frac{L}{2}ημθ=\sqrt{\frac{24}{13}}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}m/s=\sqrt{\frac{6}{13}}m/s\approx 0{,}68m/s$

Σχόλια:

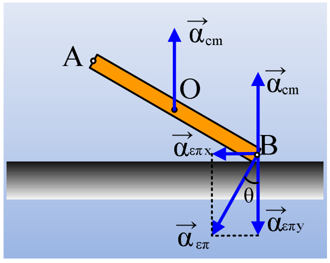
1) Ας προσέξουμε ότι έχοντας μια σανίδα βάρους 10Ν, μπορούμε να την ανασηκώσουμε από το έδαφος με δύναμη, ελάχιστα μεγαλύτερη από το μισό (5Ν). Δεν πρόκειται προφανώς για υλικό σημείο που θα απαιτείτο δύναμη μεγαλύτερη από 10Ν, που είναι το βάρος του. Αλλά όταν λέμε για τη σανίδα, ανασηκώνουμε, ας μην ξεχνάμε ότι συνεχίζει να ακουμπά με το ένα της άκρο στο έδαφος!

2) Τη στιγμή t=0 που ασκείται η δύναμη F, το σημείο Β έχει μηδενική ταχύτητα και δεν έχει επιτάχυνση. Θα μπορούσαμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι η σανίδα εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από το άκρο Β (αυτό άλλωστε μας φαίνεται και πλέον κοντά σε αυτό που «βλέπουμε» :

$$\Sigma\tau = I_B \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot L - mg \cdot \tfrac{1}{2} L = \left(\frac{1}{12}mL^2 + m\frac{L^2}{4}\right)\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3\left(F - \frac{mg}{2}\right)}{mL} \rightarrow a_{cm} = \frac{3\left(F - \frac{mg}{2}\right)}{2m} = \frac{3(6-5)}{2} m/s^2 = 1{,}5 m/s^2$$

3) Ας έρθουμε τώρα στην θέση που η σανίδα σχηματίζει γωνία θ. Αν θέλαμε να υπολογίσουμε την α_{cm}; Θα μπορούσαμε να δουλέψουμε όπως παραπάνω:



$$\Sigma F = m \cdot \alpha_{cm} \rightarrow F + N - w == m \cdot \alpha_{cm}$$

$$\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F \cdot \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\vartheta - N \cdot \frac{L}{2}\sigma\upsilon\nu\vartheta = \frac{1}{12}mL^2 a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$F - N = \frac{1}{6\sigma\upsilon\nu\vartheta} mL \cdot a_{\gamma\omega\nu}$$

Αλλά με βάση το σχήμα $\alpha_{cm} = \alpha_{\varepsilon\pi y} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{L}{2}$ συνθ , οπότε:

$$F - N = \frac{1}{6\sigma\upsilon\nu\vartheta} m \frac{2a_{cm}}{\sigma\upsilon\nu\vartheta} \rightarrow$$

$$F - N = \frac{ma_{cm}}{3\sigma\upsilon\nu^2\vartheta} \rightarrow a_{cm} = \frac{2F - mg}{m\left(1 + \frac{1}{3\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}\right)} = \frac{18}{13} m/s^2$$

Τώρα δεν μπορούμε να δουλέψουμε ως προς νοητό άξονα που περνά από το σημείο Β, το οποίο έχει πλέον επιτάχυνση και μάλιστα αυτή $\alpha_{\varepsilon\pi x} = \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{L}{2} \cdot$ημθ είναι οριζόντια, οπότε δεν περνά από το κέντρο μάζας Ο.

Συμπέρασμα: Ο πιο ασφαλής τρόπος να μελετάμε μια σύνθετη κίνηση στερεού, είναι να την θεωρούμε ότι είναι μια μεταφορική και μια στροφική γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο μάζας. Σε μερικές περιπτώσεις υπάρχουν και καλύτερες λύσεις, αλλά αν δεν είμαστε σίγουροι…. καλύτερα να τις αποφεύγουμε.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης