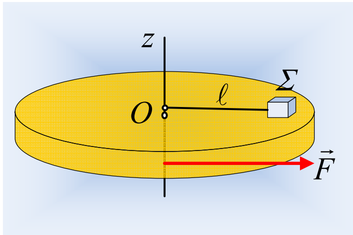
Μεγαλύτερες περιπέτειες…

Μετά την ανάρτηση «[*Ένα σύστημα σωμάτων σε περιπέτειες…*]» ας πάμε ένα βήμα παρακάτω, στη μελέτη του συστήματος σωμάτων και της εφαρμογής του γενικευμένου νόμου του Νεύτωνα.



Μια οριζόντια κυκλική πλατφόρμα μάζας M=20kg και ακτίνας R=1m, μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα z, χωρίς τριβές, ο οποίος περνά από το κέντρο της Ο. Πάνω στην πλατφόρμα ηρεμεί ένα σώμα Σ μάζας m=2kg, δεμένο στο άκρο νήματος μήκους $\ell = 0{,}8m$, το άλλο άκρο του οποίου μέσω ενός δακτυλίου δένεται στον άξονα z, έτσι ώστε το σώμα Σ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς να τυλίγεται το νήμα στον άξονα. Σε μια στιγμή (t_0=0) ασκείται στην περιφέρεια της πλατφόρμας, εφαπτομενικά, μια οριζόντια σταθερού μέτρου δύναμη F=21,6N, με αποτέλεσμα τη στιγμή t_1=5s η πλατφόρμα να έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω_1=10rad/s.

i) Να εξετάσετε αν υπάρχει τριβή μεταξύ σώματος Σ και πλατφόρμας, με αποτέλεσμα να τεθεί σε περιστροφή και το σώμα Σ.

ii) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής κατά (ως προς) τον άξονα z:

α) του συστήματος β) της πλατφόρμας και γ) του σώματος Σ.

στο χρονικό διάστημα 0-5s.

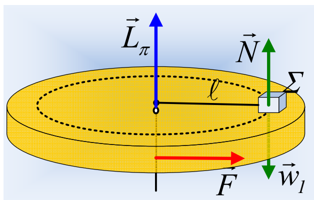
iii) Να υπολογιστεί τη χρονική στιγμή t_1 η στροφορμής κατά (ως προς) τον άξονα z:

α) του συστήματος β) της πλατφόρμας και γ) του σώματος Σ.

iv) Τη στιγμή t_1 η δύναμη F καταργείται, οπότε μετά από λίγο παρατηρούμε ότι το σώμα Σ δεν γλιστράει πάνω στην πλατφόρμα. Να υπολογιστεί τότε η ταχύτητα του σώματος Σ.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας, ως προς τον άξονά της I= ½ MR^2.

Απάντηση:



i) Η στροφορμή της πλατφόρμας τη στιγμή t_1 έχει μέτρο:

$$L_\pi = I\omega = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \omega \rightarrow$$

$$L_\pi = \frac{1}{2}20 \cdot 1^2 10kg \cdot m^2/s = 100kg \cdot m^2/s$$

Έστω τώρα ότι δεν εμφανίζεται τριβή μεταξύ σώματος Σ και πλατφόρμας. Τότε στο σώμα Σ ασκείται το βάρος και η αντίδραση της πλατφόρμας N, η συνισταμένη των οποίων είναι μηδέν και το σώμα παραμένει ακίνητο.

Για την πλατφόρμα έχουμε:

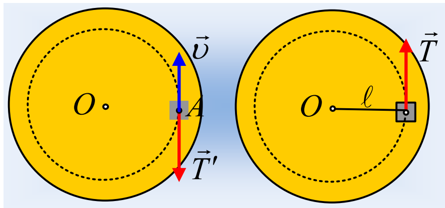
$$\frac{dL_\pi}{dt}=\Sigma\tau \rightarrow \frac{dL_\pi}{dt}=\tau_w+\tau_{F_{\alpha\xi}}+\tau_{N'}+\tau_F$$

Όπου οι ροπές, του βάρους, της δύναμης από τον άξονα και της αντίδρασης της Ν που α-σκείται στο σώμα Σ είναι μηδενικές, άρα:

$$\frac{dL_\pi}{dt}=\tau_F=FR \rightarrow \frac{\Delta L_\pi}{\Delta t}=FR \rightarrow \frac{L_\pi-0}{t_1-0}=FR \rightarrow$$

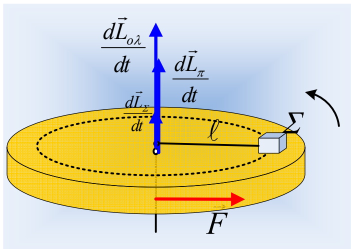
$$L_\pi=FRt_1=21{,}6\cdot 1\cdot 5kg\cdot m^2/s=108kg\cdot m^2/s$$

Πράγμα **άτοπο**, οπότε πρέπει στην πλατφόρμα να ασκείται και κάποια άλλη δύναμη, η ροπή της οποίας να μείωσε τη στροφορμή από την τιμή 108kg·m²/s στην τιμή 100kg·m²/s. Η δύναμη αυτή είναι τριβή που ασκείται στην πλατφόρμα από το σώμα Σ. Αλλά τότε και στο σώμα Σ ασκήθηκε δύναμη τριβής, η οποία θα το επιταχύνει με αποτέλεσμα να αρχίσει να στρέφεται γύρω από τον άξονα.



Γιατί; Ας δούμε το παραπάνω σχήμα σε κάτοψη. Έστω ότι το σώμα Σ βρίσκεται στο σημείο Α της πλατφόρμας. Όταν αυτή επιταχυνθεί, το σημείο Α αποκτά ταχύτητα $\upsilon_\pi=\upsilon=\omega\, r$ με αποτέλεσμα να α-σκηθεί στην πλατφόρμα, από το σώμα Σ, δύναμη τριβής Τ΄ αντίθετης φοράς από την ταχύτητα. Αλλά τότε η αντίδρασή της Τ, ασκείται στο σώμα Σ και το επιταχύνει. Προσέξτε ότι η τριβή είναι εφαπτόμενη στον κύκλο ακτίνας $r=\ell$.

ii) Οι δυνάμεις τριβής που ασκούνται σε πλατφόρμα-σώμα Σ, είναι εσωτερικές δυνάμεις για το σύστημα, οπότε ο γενικευμένος νόμος του Νεύτωνα για το σύστημα δίνει:



$$\frac{dL_{o\lambda}}{dt}=\Sigma\tau_{\varepsilon\xi} \rightarrow$$

Αλλά η δύναμη του άξονα και τα βάρη δεν έχουν ροπή ως προς τον άξονα, οπότε παίρνουμε:

$$\frac{dL_{o\lambda}}{dt}=\tau_F=FR=21{,}6\cdot 1kg\cdot m^2/s^2=21{,}6kg\cdot m^2/s^2$$

Στην πλατφόρμα ασκούνται οι ροπές της δύναμης F και της τριβής Τ΄. Είτε η τριβή αυτή είναι στατική, είτε ολίσθησης, στο χρονικό διάστημα 0-5s, έχει σταθερό μέτρο και συνεπώς σταθερή ροπή, οπότε ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της παραμένει σταθερός και ι-σχύει:

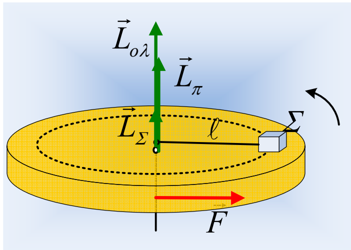
$$\frac{dL_\pi}{dt}=\Sigma\tau=\sigma\tau\alpha\theta \rightarrow \frac{dL_\pi}{dt}=\frac{\Delta L}{\Delta t}=\frac{L_1-0}{t_1-0}=\frac{100}{5}kg\cdot m^2/s^2=20kg\cdot m^2/s^2.$$

Αλλά: $\dfrac{d\vec{L}_{o\lambda}}{dt}=\dfrac{d\vec{L}_\pi}{dt}+\dfrac{d\vec{L}_\Sigma}{dt} \rightarrow$

$$\frac{dL_{\Sigma}}{dt} = \frac{dL_{o\lambda}}{dt} - \frac{dL_{\pi}}{dt} = 21{,}6kg \cdot m^2 / s^2 - 20kg \cdot m^2 / s^2 = 1{,}6kg \cdot m^2 / s^2$$

Οι παραπάνω ρυθμοί είναι διανύσματα πάνω στον άξονα z και φορά προς τα πάνω, όπως έχουν σχεδιαστεί στο παραπάνω σχήμα.

iii) Στο i) ερώτημα υπολογίσαμε τη στιγμή t_1 τη στροφορμή της πλατφόρμας $L_\pi = 100 kgm^2/s$. Για το σύστημα έχουμε:



$$\frac{dL_{o\lambda}}{dt} = FR \rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = FR \rightarrow L_{o\lambda} = FRt_1$$

$$L_{o\lambda} = 21{,}6 \cdot 1 \cdot 5kg \cdot m^2 / s^2 = 108kg \cdot m^2 / s.$$

Όμως $\vec{L}_{o\lambda} = \vec{L}_{\pi} + \vec{L}_{\Sigma} \rightarrow$

$$L_\Sigma = L_{o\lambda} - L_\pi = 108kgm^2/s - 100kgm^2/s = 8kgm^2/s.$$

Με κατευθύνσεις, όπως στο σχήμα.

iv) Μόλις πάψει να ασκείται η δύναμη F, οι μόνες δυνάμεις που παρουσιάζουν ροπή ως προς τον άξονα είναι οι δυνάμεις τριβής. Εξαιτίας της τριβής το σώμα Σ επιταχύνεται ενώ η πλατφόρμα επιβραδύνεται. Μόλις λοιπόν η ταχύτητα του σώματος Σ πάρει τιμή ίση με τη γραμμική ταχύτητα ενός σημείου της πλατφόρμας που απέχει κατά $r=\ell$ από το κέντρο Ο, θα πάψει η άσκηση της τριβής και το σύστημα θα περιστρέφεται σαν ένα σώμα με μια γωνιακή ταχύτητα ω_κ. Αλλά οι δυνάμεις τριβής είναι εσωτερικές για το σύστημα, οπότε η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή:

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow \quad L_{o\lambda} = \left(\frac{1}{2}MR^2 + m\ell^2\right)\omega_\kappa \rightarrow$$

$$\omega_\kappa = \frac{L_{o\lambda}}{\frac{1}{2}MR^2 + m\ell^2} = \frac{108}{\frac{1}{2}20 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0{,}8^2} rad/s = 9{,}57 rad/s$$

Οπότε το σώμα Σ έχει ταχύτητα:

$$\upsilon_\Sigma = \omega_\kappa \ell = 9{,}57 \cdot 0{,}8 m/s \approx 7{,}66 m/s$$

Σχόλια:

1) Η παραπάνω τριβή θα μπορούσε να ήταν στατική και να μην υπήρχε ολίσθηση του Σ πάνω στην πλατφόρμα. Αν συνέβαινε αυτό, τότε στο τελευταίο ερώτημα θα βρίσκαμε $\omega_\kappa = 10 rad/s$, ίση δηλαδή με τη γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας τη στιγμή t_1.

2) Με βάση τα ευρήματα του i) ερωτήματος, είναι φανερό ότι μέσω της ροπής της δύναμης F στο σύστημα «μεταφέρεται» στροφορμή 108kgm^2/s, ενώ η πλατφόρμα «κρατά» τα $100\ kgm^2/s$, συνεπώς τα υπόλοιπα $8\ kgm^2/s$ είναι η στροφορμή του Σ. Η οποία όμως δίνεται από την σχέση:

$$L_\Sigma = m\upsilon\ell \to \upsilon = \frac{L_\Sigma}{m\ell} = \frac{8}{2\cdot 0{,}8} m/s = 5m/s$$

Ενώ ένα σημείο της πλατφόρμας που απέχει κατά 0,8m από το κέντρο Ο, έχει γραμμική ταχύτητα $\upsilon_{\gamma\rho} = \omega \cdot \ell = 10 \cdot 0{,}8 m/s = 8m/s$.

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ολίσθηση και η ασκούμενη τριβή είναι τριβή ολίσθησης.

3) Θα μπορούσαμε και να υπολογίσουμε τη τριβή, δουλεύοντας είτε με την πλατφόρμα, είτε με το Σ. Ας το κάνουμε με το σώμα Σ, εφαρμόζοντας το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau \to \frac{\Delta L}{\Delta t} = T\ell \to$$

$$T\ell = \frac{m\upsilon\ell - 0}{t_1 - 0} \to T = \frac{m\upsilon}{t_1} = \frac{2\cdot 5}{5} N = 2N$$

Βέβαια θα μπορούσαμε να δουλέψουμε και με την επιταχυνόμενη κυκλική κίνηση και την επιτρόχια επιτάχυνση που αποκτά λόγω τριβής:

$$T = m\alpha_{\varepsilon\pi} \quad \text{ενώ} \quad \upsilon = \alpha_{\varepsilon\pi} \cdot t_1$$

Οπότε και πάλι $T = \dfrac{m\upsilon}{t_1}$.

4) **Σχόλιο για καθηγητές**: αν όλα τα παραπάνω σας θυμίζουν το θεώρημα ώθησης ορμής, για την κίνηση υλικού σημείου, η σύμπτωση …δεν είναι καθόλου τυχαία!

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης