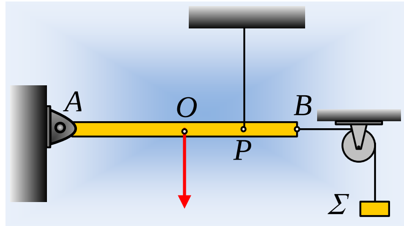
Μια ισορροπία και οι αρχικές επιταχύνσεις.

Μια ομογενής δοκός μήκους 2m και μάζας M=30kg, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άρθρωση στο άκρο της Α και ισορροπεί οριζόντια δεμένη με κατακόρυφο νήμα στο σημείο Ρ, όπου (ΡΒ)=0,5m και με οριζόντιο νήμα, το οποίο αφού περάσει από αβαρή τροχαλία, με την οποία δεν εμφανίζει τριβές, στο άλλο του άκρο ισορροπεί ένα σώμα Σ, όπως στο σχήμα.



i) Υποστηρίζεται ότι το κατακόρυφο νήμα δεν είναι απαραίτητο, αρκεί το σώμα Σ να έχει κατάλληλο βάρος που να εξασφαλίζει την ισορροπία της δοκού. Να εξεταστεί αν αυτό είναι μια λογική υπόθεση.

ii) Αν η μάζα του σώματος Σ είναι ίση με m=10kg, να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στη δοκό από την άρθρωση.

iii) Σε μια στιγμή t=0, κόβουμε το κατακόρυφο νήμα. Αμέσως μετά (για $t=0^+$) να υπολογιστούν:

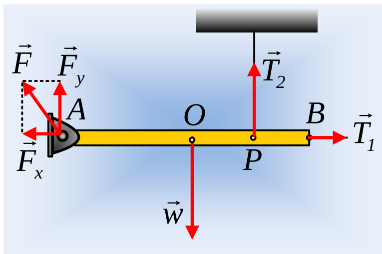
α) Επιτάχυνση του μέσου Ο της δοκού και του σώματος Σ.

β) Η δύναμη που ασκείται στη δοκό από την άρθρωση.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$ και ροπή αδράνειας της δοκού ως προς κάθετο άξονα που περνά από το ένα της άκρο $I_A = \frac{1}{3}M\ell^2$.

Απάντηση:

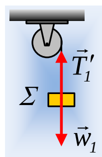
i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη δοκό, όπου T_2 η τάση του κατακόρυφου νήματος. Ας υποθέσουμε ότι βάζοντας ένα «βαρύ» σώμα Σ στο άκρο του νήματος που περνά από την τροχαλία, πετυχαίνουμε να ισορροπεί η δοκός οριζόντια, χωρίς να απαιτείται η πρόσδεση στο σημείο Ρ, οπότε δεν θα ασκείται και η δύναμη T_2, η οποία έχει σχεδιαστεί στο σχήμα. Αφού η ράβδος ισορροπεί $\Sigma\tau_A=0$. Αλλά αν πάρουμε τις ροπές ως προς το άκρο Α της δοκού, θα έχουμε:



$$\Sigma\tau_A=\tau_F+\tau_w+\tau_{T1}=0\text{-}w\cdot ½\, l+0 = -\frac{1}{2}w\ell \neq 0$$

Άρα η δοκός δεν μπορεί να ισορροπεί οριζόντια σε καμιά περίπτωση, αν δεν προσδεθεί όπως στο αρχικό σχήμα και με δεύτερο νήμα και η υπόθεση είναι λανθασμένη.

ii) Το σώμα Σ ισορροπεί, οπότε $\Sigma F_1=0$ ή $T_1'=w_1=mg=100N$, οπότε και η οριζόντια δύναμη που ασκείται στη δοκό, από το νήμα έχει μέτρο $T_1=100N$. Έτσι παίρνοντας τη συνθήκη ισορροπίας για τη δοκό, έχουμε:



$$\Sigma\vec{F}=0 \rightarrow \begin{cases} \Sigma F_x=0 \rightarrow F_{\alpha\xi x}+T_1=0 & (1) \\ \Sigma F_y=0 \rightarrow F_{\alpha\xi y}+T_2-w=0 & (2) \end{cases}$$

$$\Sigma\tau_A=0 \rightarrow T_2\frac{3}{4}\ell - w\frac{1}{2}\ell=0 \rightarrow T_2=\frac{2}{3}w=200N$$

Από την (1) $F_{\alpha\xi x}=T_1=100N$ και από την σχέση (2):

$$F_{\alpha\xi y}=w-T_2=300N-200N=100N.$$

Αλλά τότε το παραλληλόγραμμο που σχηματίζουν οι δυο συνιστώσες είναι τετράγωνο, οπότε η δύναμη από την άρθρωση σχηματίζει γωνία 45° με την οριζόντια διεύθυνση, έχοντας μέτρο:

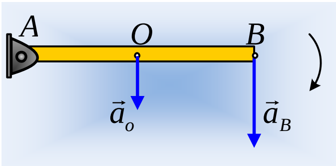
$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}=\sqrt{100^2+100^2}N=100\sqrt{2}N$$

iii) Μόλις κόψουμε το κατακόρυφο νήμα, η δοκός αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από το άκρο της Α, δεξιόστροφα.

α)Από τον 2ο νόμο του Νεύτωνα παίρνουμε:

$$\Sigma\tau=I_A\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow w\cdot\frac{\ell}{2}=\frac{1}{3}M\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu}=\frac{3g}{2\ell}=\frac{3\cdot 10}{2\cdot 2}rad/s^2=7{,}5rad/s^2.$$



Αλλά τότε το μέσον Ο της δοκού, εκτελεί κυκλική κίνηση με ακτίνα R=$\ell/2$, όπου τη στιγμή t=0, έχει κεντρομόλο επιτάχυνση $\alpha_\kappa=\omega^2R=0$, αφού δεν έχει αποκτήσει ακόμη γωνιακή ταχύτητα, ενώ έχει επιτρόχιο επιτάχυνση (επιτάχυνση ίση με το ρυθμό μεταβολής της γραμμικής του ταχύτητας) μέτρου:

$$a_o=\frac{d|\upsilon_o|}{dt}=\frac{d\omega\cdot R}{dt}=a_{\gamma\omega\nu}\cdot\frac{\ell}{2}=7{,}5\cdot 1m/s^2=7{,}5m/s^2.$$

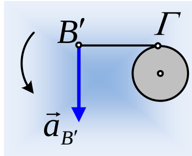
Εξάλλου θεωρώντας ότι το σώμα Σ θα επιταχυνθεί προς τα πάνω, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δίνει:

$$\Sigma F_y=m\alpha_1 \rightarrow T_1-mg=m\cdot\alpha_1 \quad (3)$$

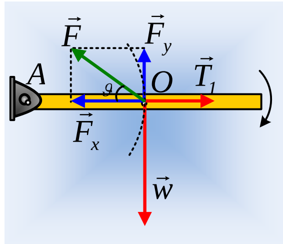
Όμως αν πάρουμε την επιτάχυνση του άκρου Β της ράβδου, σημείο πρόσδεσης του νήματος, έχουμε (όπως και για το σημείο Ο):

$$a_B=\frac{d|\upsilon_B|}{dt}=\frac{d\omega\cdot R}{dt}=a_{\gamma\omega\nu}\cdot\ell=7{,}5\cdot 2m/s^2=15m/s^2.$$

Με κατακόρυφη διεύθυνση, όπως στο παραπάνω σχήμα.



Αλλά τότε και το άκρο Β΄ του νήματος, το οποίο προσδένεται στη δοκό, δεν επιταχύνεται οριζόντια, παρά μόνο κατακόρυφα, πράγμα που σημαίνει ότι στην πραγματικότητα στρέφεται γύρω από το σημείο επαφής του με την τροχαλία Γ και το μήκος του οριζόντιου τμήματός του (Β΄Γ) δεν μεταβάλλεται. Άρα ούτε και το σώμα Σ θα αλλάξει θέση και $α_1=0$, το σώμα Σ δηλαδή συνεχίζει να ισορροπεί και $T_1=w_1=100N$.



β) Εφαρμόζουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την κίνηση του κέντρου μάζας της σανίδας Ο, θεωρώντας ότι εκτελεί κυκλική κίνηση, με κέντρο το σημείο Α, ενώ μεταφέρουμε όλες τις ασκούμενες δυνάμεις στο κέντρο μάζας, όπως στο διπλανό σχήμα. Έτσι έχουμε:

$$\Sigma F_x = M\cdot\alpha_x \rightarrow F_x - T_1 = M\frac{\upsilon_o^2}{R} = 0 \rightarrow F_x = T_1 = 100N$$

$$\Sigma F_y = M\cdot\alpha_y \rightarrow w - F_y = M\cdot\alpha_o \rightarrow F_y = Mg - M\cdot\alpha_o = 30(10-7{,}5)N = 75N$$

Αλλά τότε το μέτρο της δύναμης F που ασκείται στη δοκό από την άρθρωση, έχει μέτρο:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{100^2 + 75^2}\,N = 125N$$

Ενώ η διεύθυνσή της σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία θ, όπου:

$$\varepsilon\varphi\vartheta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{75}{100} = 0{,}75$$

Σχόλιο:

Αξίζει να τονισθεί, ότι όλη η μελέτη για την κίνηση των σωμάτων έγινε για τη στιγμή μηδέν ή αλλιώς μόλις ακριβώς κόψουμε το νήμα. Όταν λοιπόν βρήκαμε ότι η επιτάχυνση του σώματος Σ είναι μηδενική και δεν θα κινηθεί, αυτό ισχύει για την παραπάνω στιγμή. Στη συνέχεια βέβαια το νήμα θα τραβηχτεί από τη δοκό και το Σ θα επιταχυνθεί προς τα πάνω.

Υλικό Φυσικής-Χημείας
Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης