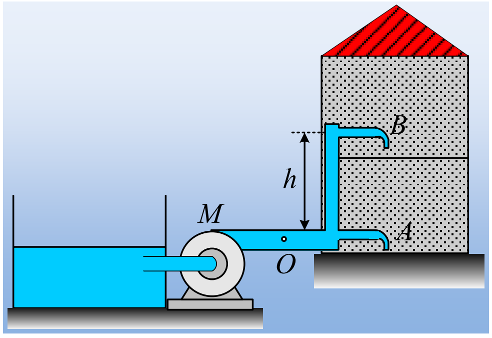
Ας μειώσουμε το συντελεστή δόμησης!!!.



Ας συνεχίσουμε στη γραμμή της ανάρτηση; «[Τρεις ανοικτές βρύσες και η αντλία.]» αλλά μειώνοντας …τους ορόφους, για λιγότερες πράξεις.

Μια διώροφη!!! λοιπόν κατοικία τροφοδοτείται με νερό από μια δεξαμενή, στην επιφάνεια του εδάφους, με την βοήθεια μιας αντλίας (Μ), όπως στο σχήμα. Ο κεντρικός σωλήνας τροφοδοσίας έχει διατομή A_1=14,5cm^2, ενώ με πλήρως ανοικτές τις βρύσες, το νερό εξέρχεται σχηματίζοντας φλέβες με διατομές A=0,3cm^2. Η βρύση στο ισόγειο, βρίσκεται στο ίδιο ύψος με την αντλία, ενώ η βρύση στον πρώτο όροφο βρίσκεται ψηλότερα κατά h=4m. Η αντλία λειτουργεί αυτόματα, εξασφαλίζοντας στην έξοδό της, σταθερή πίεση p_o. Ανοίγουμε ταυτόχρονα και πλήρως τις δυο βρύσες, οπότε η παροχή της βρύσης του ισογείου είναι 0,45L/s. Θεωρώντας μηδενικό το συντελεστή ιξώδους, ενώ δεν υπάρχουν τριβές του νερού με τα τοιχώματα και τις ροές μόνιμες και στρωτές:

i) Να βρεθεί η παροχή της βρύσης του πρώτου ορόφου.

ii) Ποια η ισχύς τη αντλίας;

iii) Βέβαια στην πραγματικότητα, η παραπάνω ροή δεν είναι στρωτή αλλά τυρβώδης, αφού το νερό δεν έχει μηδενικό συντελεστή ιξώδους. Έτσι λειτουργώντας η αντλία με τον ίδιο τρόπο εξασφαλίζει στο σημείο Ο την ίδια σταθερή πίεση p_o, ενώ οι παροχές είναι Π_A=0,42L/s, Π_B=0,30L/s . Να βρεθεί η ισχύς που μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας της εσωτερικής τριβής που εμφανίζεται.

Δίνεται η πυκνότητα του νερού ρ=1.000kg/m^3 και g=10m/s^2.

Απάντηση:

i) Έστω υ_1 και υ_2 οι ταχύτητες εκροής στις δυο βρύσες και υ η ταχύτητα του νερού στην έξοδο της αντλίας, σημείο Ο. Για την βρύση Α:

$$\Pi_1 = A\cdot\upsilon_1 \rightarrow \upsilon_1 = \frac{0,45\cdot 10^{-3} m^3/s}{0,3\cdot 10^{-4} m^2} = 15m/s$$

Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Ο και του σημείου εξόδου της βρύσης Α στο ισόγειο:

$$p_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2 = p_A + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \quad (1)$$

Από την εξίσωση Bernoulli μεταξύ του σημείου Ο και του σημείου εξόδου της βρύσης Β:

$$p_o + \frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 + \rho g h \quad (2)$$

Από (1) και (2) λαμβάνοντας υπόψη ότι $p_B = p_A = p_{ατμ}$, έχουμε:

$$p_B+\frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2+\rho gh=p_A+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\rightarrow$$

$$\upsilon_2=\sqrt{\upsilon_1^2-2gh}=\sqrt{15^2-2\cdot 10\cdot 4}m/s\approx 12m/s$$

Αλλά τότε η παροχή της βρύσης του α΄ ορόφου είναι:

$$\Pi_2=A\cdot\upsilon_2=0{,}3\cdot 10^{-4}\cdot 12m^3/s=0{,}36L/s.$$

ii) Υπεύθυνη για την αύξηση της μηχανικής ενέργειας του νερού, κατά την μεταφορά του από την δεξαμενή, στις βρύσες, είναι η αντλία. Αλλά ο ρυθμός αύξησης της μηχανικής ενέργειας του νερού κατά την παραπάνω μεταφορά είναι:

$$\frac{\Delta U}{\Delta t}+\frac{\Delta K}{\Delta t}=\frac{\Delta m\cdot gh}{\Delta t}+\frac{\frac{1}{2}\Delta m\cdot\upsilon^2}{\Delta t}=\frac{\rho\Delta V\cdot gh}{\Delta t}+\frac{\frac{1}{2}\rho\Delta V\cdot\upsilon^2}{\Delta t}\rightarrow$$

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta t}=\frac{\Delta U}{\Delta t}+\frac{\Delta K}{\Delta t}=\Pi\left(\rho gh+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon^2\right)\rightarrow$$

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta t}=\Pi_1\left(\rho gh+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2\right)=0{,}45\cdot 10^{-3}\left(\frac{1}{2}1.000\cdot 15^2\right)J/s\approx 50{,}6J/s$$

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta t}=\Pi_2\left(\rho gh+\frac{1}{2}\rho\cdot\upsilon_1^2\right)=0{,}36\cdot 10^{-3}\left(10.000\cdot 4+\frac{1}{2}1.000\cdot 12^2\right)J/s\approx 40{,}4J/s$$

$$\frac{\Delta E_{o\lambda}}{\Delta t}=(50{,}6+40{,}4)J/s\approx 91J/s=P_{\alpha\nu\tau\lambda\iota\alpha\varsigma}$$

Εναλλακτικά:

Η ισχύς της αντλίας, είναι ο ρυθμός με τον οποίο παράγει έργο πάνω στη στήλη του νερού, για τη μετακίνησή του από το Ο στην έξοδο, στις βρύσες, συν το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του νερού κατά την μεταφορά του από τη δεξαμενή στην έξοδο της αντλίας στο Ο. Αλλά τότε:

$$P=\frac{\Delta W}{\Delta t}+\frac{dK}{dt}=\frac{(p_o-p_{\alpha\tau})\Delta V}{\Delta t}+\Pi\cdot\frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2=(p_o-p_{\alpha\tau}+\frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2)\cdot\Pi$$

Εξάλλου από την σχέση (1) παίρνουμε $p_o-p_{\alpha\tau}=\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2-\frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2$ (4) και η παραπάνω εξίσωση δίνει:

$$P_{\alpha\nu\tau}=\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\cdot\Pi \quad (5)$$

Όπου η συνολική παροχή είναι $\Pi=\Pi_1+\Pi_2=(0{,}45+0{,}36)L/s=0{,}81L/s$, οπότε:

$$P_{\alpha\nu\tau}=\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\cdot\Pi=\frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 15^2\cdot 0{,}81\cdot 10^{-3}W\approx 91W$$

iii) Το νερό που εξέρχεται στη μονάδα του χρόνου, από την Α βρύση, αφού η ροή είναι τυρβώδης, δεν είναι σταθερή. Μπορούμε όμως να βρούμε την μέση ταχύτητα εκροής:

$$\upsilon_1' = \frac{\Pi_1'}{A} = \frac{0,42 \cdot 10^{-3} m^3/s}{0,3 \cdot 10^{-4} m^2} = 14m/s$$

Αποτέλεσμα της μεταφοράς είναι να αυξάνεται η μηχανική ενέργεια του νερού και ο ρυθμός αύξησης θα είναι:

$$\frac{\Delta E_1}{\Delta t} = \frac{\Delta U}{\Delta t} + \frac{\Delta K}{\Delta t} = \Pi_1\left(\rho gh + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_1'^2\right) = 0,42 \cdot 10^{-3}\left(\frac{1}{2}1.000 \cdot 14^2\right)J/s \approx 41,2J/s$$

Με την ίδια λογική, από την βρύση Β:

$$\upsilon_2' = \frac{\Pi_2'}{A} = \frac{0,3 \cdot 10^{-3} m^3/s}{0,3 \cdot 10^{-4} m^2} = 10m/s$$

$$\frac{\Delta E_2}{\Delta t} = \Pi_2\left(\rho gh + \frac{1}{2}\rho \cdot \upsilon_2^2\right) = 0,3 \cdot 10^{-3}\left(1.000 \cdot 10 \cdot 4 + \frac{1}{2}1.000 \cdot 10^2\right)J/s = 27J/s$$

Συνεπώς η συνολική αύξηση της μηχανικής ενέργειας της ποσότητας του νερού που εξέρχεται από τις βρύσες, στη μονάδα του χρόνου, είναι ίση με $(41,2+27)J/s = 68,2J/s$ ενώ η αντίστοιχη ενέργεια που πήρε από την αντλία είναι:

$$P_{\alpha\nu\tau}' = (p_o - p_{\alpha\tau}) \cdot \Pi' + \frac{dK_o}{dt} = \left(p_o - p_{\alpha\tau} + \frac{1}{2}\rho\upsilon_o^2\right) \cdot \Pi' \rightarrow$$

Όμως λαμβάνοντας υπόψη την (4), παίρνουμε:

$$P_{\alpha\nu\tau}' = \left(\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2\right) \cdot \Pi'$$

Ας **σημειωθεί** ότι η πίεση που δημιουργεί η αντλία είναι ίδια, είτε το νερό θεωρηθεί ιδανικό ρευστό, είτε όχι, οπότε και η διαφορά $p_o - p_{\alpha\tau}$ είναι η ίδια.

Εξάλλου η συνολική παροχή είναι ίση με $\Pi'=\Pi_1'+\Pi_2' = (0,42+0,30)L/s = 0,72L/s$, οπότε:

$$P_{\alpha\nu\tau}' = \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 \cdot \Pi' = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot 15^2 \cdot 0,72 \cdot 10^{-3}W = 81W$$

Αλλά τότε με βάση της διατήρηση της ενέργειας, η ενέργεια ανά μονάδα χρόνου, η οποία μετατρέπεται σε θερμική (αυξάνοντας την εσωτερική ενέργεια του νερού και των σωλήνων), εξαιτίας των τριβών, είναι:

$$P_Q = (81J - 68,2)J/s = 12,8J/s$$

Σχόλιο.

Ας δούμε την εξίσωση (5).

$$P_{αντ} = \left(\frac{1}{2} ρυ_1^2 \right) \cdot Π$$

Η ισχύς της αντλίας είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του νερού, εάν εξέρχεται όλο από τη βρύση στο ισόγειο, επί την συνολική παροχή! Δεν μας ενδιαφέρει πού καταλήγει το νερό. Ξεκίνησε από τη δεξαμενή με μηδενική κινητική ενέργεια (και μηδενική δυναμική) και αν δεν «έπαιρνε την ανηφόρα» θα κατέληγε στην βρύση στο ισόγειο με ορισμένη κινητική ενέργεια. Τότε η παροχή επί το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας του νερού μας δίνει την «κερδισμένη» ενέργεια, ανά μονάδα όγκου, από την αντλία.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης