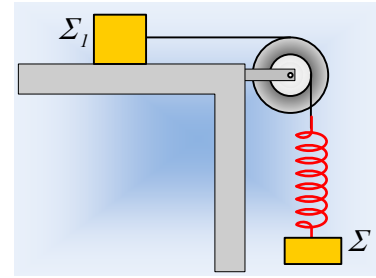


### Μια ταλάντωση και μια διπλή τροχαλία.

Μια διπλή τροχαλία, η οποία αποτελείται από δύο ομόκεντρους ομογενείς δίσκους με ακτίνες  $R_1=0,1\text{m}$  και  $R_2=0,2\text{m}$  και μάζες  $M_1=2\text{kg}$  και  $M_2=4\text{kg}$  αντίστοιχα, μπορεί να στρέφεται γύρω από τον σταθερό οριζόντιο άξονά της. Στην μικρή τροχαλία έχουμε τυλίξει ένα αβαρές και μη εκτατό νήμα, στο άκρο του οποίου μέσω ενός ιδανικού ελατηρίου σταθεράς  $k=50\text{N/m}$  κρέμεται ένα σώμα  $\Sigma$  μάζας  $m=2\text{kg}$ . Γύρω από την μεγάλη τροχαλία, έχει τυλιχθεί ένα δεύτερο αβαρές και μη ελαστικό νήμα, στο άλλο άκρο του οποίου έχει δεθεί ένα σώμα  $\Sigma_1$  μάζας  $m_1=3\text{kg}$ , το οποίο ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το νήμα οριζόντιο, όπως στο σχήμα.

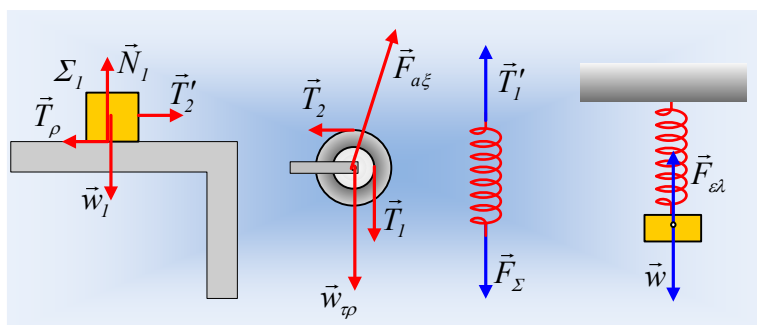


- i) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα  $\Sigma_1$ , υπολογίζοντας τα μέτρα τους.
- ii) Εκτρέπουμε το σώμα  $\Sigma$  κατακόρυφα προς τα κάτω, επιμηκώνοντας το ελατήριο, κατά  $0,2\text{m}$  και το αφήνουμε τη στιγμή  $t_0=0$  να κινηθεί. Αν δεν παρατηρείται κίνηση του σώματος  $\Sigma_1$ :
  - α) να αποδείξετε ότι η κίνηση του σώματος  $\Sigma$  είναι ΑΑΤ.
  - β) Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης του  $\Sigma$  σε συνάρτηση με το χρόνο, θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική.
  - γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της στατικής τριβής που ασκείται από το επίπεδο στο σώμα  $\Sigma_1$  σε συνάρτηση με το χρόνο.
  - δ) Ποιος ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής μεταξύ του σώματος  $\Sigma_1$  και επιπέδου, για να μην έχουμε ολίσθηση;
- iii) Δίνεται ότι μεταξύ του  $\Sigma_1$  και του επιπέδου οι συντελεστές τριβής είναι  $\mu=\mu_s=0,5$  και συγκρατώντας στη θέση του το  $\Sigma_1$ , απομακρύνουμε το σώμα  $\Sigma$  κατακόρυφα προς τα κάτω κατά  $0,4\text{m}$ . Σε μια στιγμή αφήνουμε ταυτόχρονα τα δυο σώματα να κινηθούν. Να υπολογιστούν οι αρχικές επιταχύνσεις που θα αποκτήσουν τα σώματα  $\Sigma$  και  $\Sigma_1$ .

Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός δίσκου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του  $I = \frac{1}{2} MR^2$  και  $g=10\text{m/s}^2$ .

#### Απάντηση:

Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα χωριστά.



Το σώμα Σ ισορροπεί, οπότε  $\Sigma F=0 \rightarrow F_{ελ}=mg \rightarrow k\Delta\ell_0 = mg \rightarrow$

$$\Delta\ell_0 = \frac{mg}{k} = \frac{20}{50}m = 0,4m$$

Αλλά τότε το ελατήριο δέχεται και δύναμη  $F_{\Sigma}$  ίσου μέτρου με την  $F_{ελ}=20N$  από το σώμα (δράση-αντίδραση) και αφού ισορροπεί, δέχεται και κατακόρυφη δύναμη  $T_1'=20N$  από το νήμα. Τότε το ελατήριο, ασκεί και στο νήμα κατακόρυφη δύναμη προς τα κάτω μέτρου  $20N$  και από την ισορροπία του νήματος (και χωρίς ισορροπία το νήμα είναι αβαρές...), αυτό ασκεί και δέχεται δύναμη  $20N$  στην τροχαλία. Στο δεύτερο σχήμα λοιπόν βλέπουμε να ασκείται στην τροχαλία η τάση του κατακόρυφου νήματος  $T_1=20N$ , καθώς και η τάση  $T_2$  του οριζόντιου νήματος, οπότε στο σώμα  $\Sigma_1$  ασκείται η τάση  $T_2'=T_2$ .

- i) Στο σώμα  $\Sigma_1$  ασκούνται το βάρος  $w_1=m_1g=30N$ , η αντίδραση του επιπέδου, όπου αφού  $\Sigma F_y=0$ ,  $N_1=w_1=30N$ , καθώς και η  $T_2'$  και η τριβή  $T_p$ . Από την ισορροπία της τροχαλίας παίρνουμε:

$$\Sigma \tau_o=0 \rightarrow T_1 R_1 - T_2 R_2 = 0 \rightarrow T_2 = T_1 \frac{R_1}{R_2} = 20N \frac{0,1m}{0,2m} = 10N$$

Αλλά επίσης και  $\Sigma F_{1x}=0$  οπότε  $T_p=T_2'=10N$ .

- ii) Αφού δεν παρατηρείται ολίσθηση του  $\Sigma_1$ , η τροχαλία δεν στρέφεται, οπότε στην πραγματικότητα η κατάσταση είναι ίδια, σαν το ελατήριο να κρέμεται από σταθερό σημείο, όπως στο διπλανό σχήμα.

- α) Αλλά τότε αν πάρουμε μια τυχαία θέση που το σώμα βρίσκεται σε απομάκρυνση  $y$  από την θέση ισορροπίας του, έχουμε:

$$\Sigma F = w - F_{ελ}' = mg - k(\Delta\ell_0 + y) = mg - k\Delta\ell_0 - ky = -ky$$

Συνεπώς το σώμα Σ εκτελεί ΑΑΤ, γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας και με πλάτος  $A=0,2m$ , αφού ξεκινά την ταλάντωσή του, χωρίς αρχική ταχύτητα.

- β) Η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι της μορφής  $y=A \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$ , όπου:

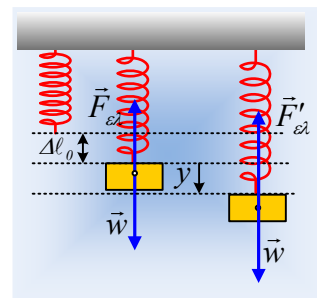
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{50}{2}} \text{rad/s} = 5 \text{rad/s}$$

Ενώ τη στιγμή  $t=0$  ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση  $y=-A$ , οπότε  $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$  και η ε-

ξίσωση γίνεται:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ μονάδες στο S.I.}$$

- γ) Επανερχόμαστε στο σώμα Σ. Στην τυχαία θέση έχουμε (με θετική κατεύθυνση προς τα πάνω):



$$\Sigma F = -Dy \rightarrow F_{ελ} - mg = -ky \rightarrow F_{ελ} = mg - ky \rightarrow$$

$$F_{ελ} = 20 - 50 \cdot 0,2 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right) = 20 - 10 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$

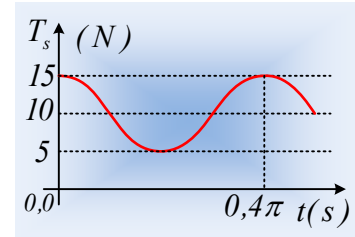
Αλλά με βάση όσα ειπώθηκαν παραπάνω, την ίδια εξίσωση θα ικανοποιεί και το **μέτρο** της τάσης  $T_1$  (η τιμή της  $F_{ελ}$  παίρνει μόνο θετικές τιμές και το νήμα είναι πάντα τεντωμένο), οπότε από την ισορροπία της τροχαλίας παίρνουμε:

$$\Sigma \tau_o = 0 \rightarrow T_1 R_1 - T_2 R_2 = 0 \rightarrow$$

$$T_2 = T_1 \frac{R_1}{R_2} = T_1 \frac{0,1m}{0,2m} = \frac{1}{2} T_1$$

Αλλά το  $\Sigma_1$  ισορροπεί, συνεπώς  $\Sigma F_x = 0 \rightarrow T_p = T_s = T_2' = T_2$ :

$$T_s = \frac{1}{2} T_1 = 10 - 5 \cdot \eta\mu\left(5t + \frac{3\pi}{2}\right) \quad (\text{S.I.})$$



Με γραφική παράσταση όπως στο διπλανό σχήμα.

δ) Για να μην ολισθήσει το σώμα  $\Sigma_1$  θα πρέπει η **μέγιστη** τιμή της στατικής τριβής που θα αναπτυχθεί, να είναι μικρότερη ίση της οριακής στατικής τριβής:

$$T_{s/\max} \leq \mu_s N_1 \rightarrow \mu_s \geq \frac{T_{s/\max}}{N_1} \rightarrow \mu_s \geq \frac{15}{30} \rightarrow \mu_s \geq 0,5$$

Συνεπώς ο ελάχιστος συντελεστής οριακής στατικής τριβής για να μην ολισθήσει το σώμα  $\Sigma_1$  είναι ίσος με  $\mu_{s/\min} = 0,5$ .

iii) Τη στιγμή  $t=0$  που αφήνουμε ελεύθερα τα σώματα, το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά  $\Delta l = \Delta l_o + y_1 = 0,8m$ , οπότε το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου είναι:

$$F_{ελ} = k \cdot \Delta l = 50 \cdot 0,8N = 40N$$

Οπότε και το μέτρο της τάσης  $T_1 = 40N$ . Αλλά τότε αν υποθέσουμε ότι η τροχαλία ισορροπεί, η τάση του οριζοντίου νήματος είναι ίση με  $T_2 = T_1 \frac{R_1}{R_2} = 20N$  ενώ η μέγιστη στατική

τριβή που μπορεί να ασκηθεί στο σώμα  $\Sigma_1$  είναι  $T_{op} = T_{ol} = \mu \cdot N_1 = 0,5 \cdot 3 \cdot 10N = 15N$ . Αυτό σημαίνει ότι δεν έχουμε πια ισορροπία και η τροχαλία στρέφεται δεξιόστροφα ενώ το σώμα  $\Sigma_1$  επιταχύνεται προς τα δεξιά.

Ερχόμαστε τώρα στο σώμα  $\Sigma$ . Αυτό επιταχύνεται προς τα πάνω με αρχική επιτάχυνση μέτρου:

$$a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{F_{ελ} - w}{m} = \frac{40N - 20N}{2kg} = 10m/s^2.$$

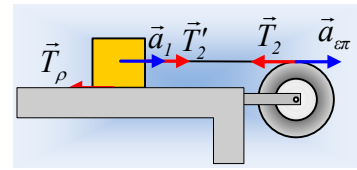
Από το 2<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα για την τροχαλία και το σώμα  $\Sigma_1$  παίρνουμε:

$$\Sigma \tau_o = I \cdot \alpha_{γων} \rightarrow T_1 \cdot R_1 - T_2 R_2 = I \cdot \alpha_{γων} \quad (1)$$

$$\text{Και } \Sigma F_x = m_1 a_1 \rightarrow T_2' - T_{ol} = m_1 a_1 \quad (2)$$

$$\text{Όπου } I=I_1+I_2=\frac{1}{2}M_1R_1^2+\frac{1}{2}M_2R_2^2=\frac{1}{2}2\cdot 0,1^2\text{ kgm}^2+\frac{1}{2}4\cdot 0,2^2\text{ kgm}^2=0,09\text{ kgm}^2.$$

Αλλά κάθε σημείο του οριζώντιου νήματος έχει την ίδια επιτάχυνση, οπότε  $a_1=a_{\text{επ}}=a_{\text{γων}}R_2$  και έχουμε από τις (1) και (2):



$$\left. \begin{array}{l} T_1 \frac{R_1}{R_2} - T_2 = \frac{I}{R_2^2} a_1 \\ T_2 - T_{o\lambda} = m_1 a_1 \end{array} \right\} + \Rightarrow a_1 = \frac{T_1 \frac{R_1}{R_2} - T_{o\lambda}}{m_1 + \frac{I}{R_2^2}} \rightarrow$$

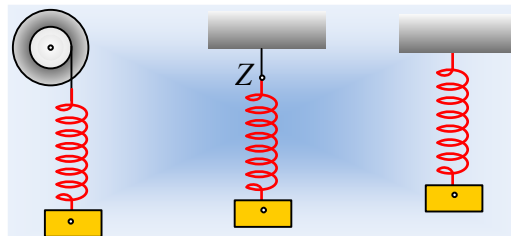
$$a_1 = \frac{40 \frac{0,1}{0,2} - 15}{3 + \frac{0,09}{0,2^2}} \text{ m/s}^2 = 20/21 \text{ m/s}^2.$$

### Σχόλιο.

Το ελατήριο, με το σώμα σε ισορροπία, έχει αρχική επιμήκυνση 0,4m. Έτσι όταν εκτρέψουμε το σώμα κατακόρυφα κατά 0,2m και το αφήσουμε να ταλαντωθεί, το ελατήριο θα βρίσκεται πάντα σε επιμήκυνση από 0,6m σε 0,2m. Αυτό σημαίνει ότι δεν πρόκειται να «χρειαστεί» να συσπειρωθεί και να μας δημιουργήσει κάποιο πρόβλημα το νήμα.

Από τη στιγμή δε, που η τροχαλία ηρεμεί, το κατακόρυφο νήμα μένει ακίνητο, όπως ακίνητο μένει και το άκρο Z του νήματος.

Έτσι οι καταστάσεις στο παρακάτω σχήμα είναι απολύτως όμοιες:



Αλλά και στο iii) ερώτημα, το ελατήριο μόλις που θα αποκτήσει το φυσικό μήκος του στη διάρκεια της ταλάντωσης και το νήμα θα ασκεί πάντα τάση (θα είναι τεντωμένο), με εξαίρεση την πάνω ακραία θέση ταλάντωσης, όπου αποκτώντας το ελατήριο το φυσικό μήκος του, μηδενίζεται στιγμιαία η τάση, χωρίς να παρατηρείται χαλάρωση του νήματος.

### Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Λιονόσης Μάργαρης