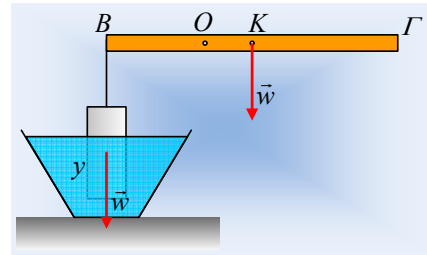
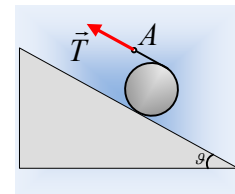


Ο κύλινδρος, η ισορροπία και η επιτάχυνσή του.

Στο διπλανό σχήμα βλέπετε μια ομογενή δοκό ΒΓ, μήκους ℓ και βάρους w , η οποία μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το σημείο Ο, όπου $(BO) = \ell/3$. Η δοκός ισορροπεί οριζόντια, ενώ στο άκρο της Β κρέμεται, με τη βοήθεια αβαρούς νήματος, ένας κύλινδρος βάρους επίσης w , με τις βάσεις του οριζόντιες, ο οποίος είναι βυθισμένος σε μια λεκάνη με νερό, κατά $y=0,2m$.



- i) Να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκεί το νερό στον κύλινδρο, καθώς και την τάση Τ του νήματος που συγκρατεί τον κύλινδρο.
- ii) Συγκρατώντας τη δοκό σε οριζόντια θέση, απομακρύνουμε τη λεκάνη με το νερό και σε μια στιγμή αφήνουμε ελεύθερο το σύστημα να κινηθεί. Να βρεθεί η αρχική επιτάχυνση του κυλίνδρου.
- iii) Παίρνουμε τον κύλινδρο αυτόν, τυλίγουμε γύρω του ένα αβαρές νήμα και τον τοποθετούμε σε λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως $\theta=30^\circ$. Ασκούμε στο άκρο Α του νήματος δύναμη παράλληλη στο επίπεδο με μέτρο ίσο με την τάση του νήματος στο i) ερώτημα και αφήνουμε ελεύθερο τον κύλινδρο να κινηθεί.



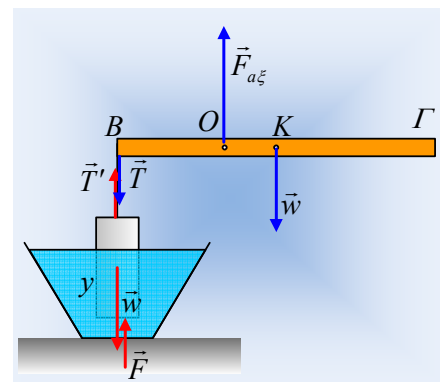
- α) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σημείου εφαρμογής της δύναμης Α.
- β) Να βρεθεί η στροφορμή του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του, τη στιγμή που έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους $0,8m$.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας μιας δοκού ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της $I_B = \frac{1}{12}M\ell^2$, η αντίστοιχη του κυλίνδρου ως τον άξονά του $I_K = \frac{1}{2}MR^2$, οι βάσεις του κυλίνδρου έχουν εμβαδόν $A_1=0,05m^2$, η πυκνότητα του νερού $\rho=1.000kg/m^3$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$. Η δράση της ατμοσφαιρικής πίεσης δεν λαμβάνεται υπόψη.

Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις σε δοκό και κύλινδρο, όπου F η δύναμη από το νερό.

- i) Ο κύλινδρος δέχεται οριζόντιες δυνάμεις από το νερό στην παράπλευρη επιφάνειά του, αλλά από την ισορροπία του θα έχουμε $\Sigma F_x=0$, συνεπώς μένει μόνο η κατακόρυφη δύναμη F που δέχεται στην κάτω έδρα του. Η κάτω έδρα του βρίσκεται σε βάθος y, οπότε στα σημεία της βάσης έχουμε πίεση $p=\rho gy$



και η ασκούμενη δύναμη έχει μέτρο:

$$F = p \cdot A_l = \rho g y A_l = 1.000 \cdot 10 \cdot 0,2 \cdot 0,05 \text{ N} = 100 \text{ N}$$

Η δοκός ΒΓ ισορροπεί, οπότε $\Sigma \tau_o = 0 \rightarrow$

$$T \cdot (BO) - w \cdot (OK) = 0 \rightarrow T \cdot \frac{\ell}{3} - w \cdot \frac{\ell}{6} = 0 \rightarrow T = \frac{w}{2}$$

Αλλά και ο κύλινδρος ισορροπεί, οπότε $\Sigma F_y = 0$ ή $T' + F - w = 0 \rightarrow$

$$\frac{w}{2} + F = w \rightarrow w = 2F = 200 \text{ N}, \text{ \acute{o}ποτε } T = 100 \text{ N} = F.$$

Αφού το νήμα είναι αβαρές και $T = T'$.

- ii) Μόλις βγάλουμε τον κύλινδρο από το νερό, προφανώς παύει να ασκείται η δύναμη F , ενώ οι άλλες δυνάμεις παραμένουν ως έχουν στο σχήμα, αλλά με διαφορετική τιμή για την τάση του νήματος. Θεωρώντας θετική την αντιωρολογιακή φορά, με εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα, έχουμε:

$$\Delta\text{οκός: } \Sigma \tau_o = I_o \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot (BO) + F_{a\xi} \cdot 0 - w \cdot (OK) = \left(\frac{1}{12} M \ell^2 + M d^2 \right) \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$T \cdot \frac{\ell}{3} - w \cdot \frac{\ell}{6} = \frac{1}{9} M \ell^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow 6T - 3Mg = 2M \ell \alpha_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

$$\text{Κύλινδρος: } \Sigma F = M \cdot \alpha \rightarrow Mg - T' = M \alpha \quad (2)$$

Θεωρώντας ότι το νήμα παραμένει τεντωμένο, κάθε σημείο του κινείται με την ίδια επιτάχυνση οπότε η επιτάχυνση του άκρου Β, θα είναι ίση με την επιτάχυνση του κυλίνδρου:

$$\alpha = \alpha_{\gamma\omega\nu} \frac{\ell}{3} \quad (3)$$

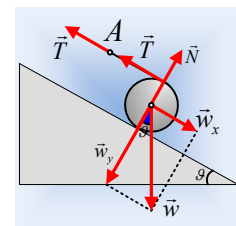
$$\text{\textup{Έτσι η (1) γίνεται } } 6T - 3Mg = 6Ma \rightarrow T - \frac{Mg}{2} = Ma \quad (1^a)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1^α) και (2) παίρνουμε:

$$\frac{Mg}{2} = 2Ma \rightarrow a = \frac{g}{4} = 2,5 \text{ m/s}^2.$$

Η παραπάνω τιμή επιβεβαιώνει ότι το νήμα μένει τεντωμένο, αφού σε αντίθετη περίπτωση ο κύλινδρος θα έκανε ελεύθερη πτώση με επιτάχυνση g^* .

- iii) Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, όταν αφεθεί στο λείο κεκλιμένο επίπεδο, όπου εφαπτομενικά μέσω του νήματος ασκείται η τάση δύναμη που ασκούμε, μέτρου $T = \frac{w}{2}$. Με εφαρμογή του 2^{ου} νόμου, θεωρώντας την κίνηση του



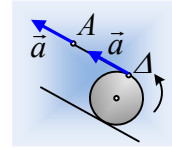
κύλινδρου σύνθετη, μια μεταφορική και μια στροφική παίρνουμε:

$$\text{Μεταφορική κίνηση: } \Sigma F_x = M \cdot a_{cm} \rightarrow T - w_x = M \cdot a_{cm} \rightarrow \frac{w}{2} = w \cdot \eta \mu \theta = M a_{cm} \rightarrow a_{cm} = 0$$

$$\text{Στροφοτική κίνηση: } \Sigma \tau_{cm} = I_{cm} \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow \frac{Mg}{2} R = \frac{1}{2} MR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$Ra_{\gamma\omega\nu} = g = 10 \text{ m/s}^2.$$

- α) Βλέπουμε λοιπόν ότι τελικά ο κύλινδρος δεν κάνει μεταφορική κίνηση, παρά μόνο στροφοτική, οπότε το σημείο επαφής Δ του νήματος με τον κύλινδρο, έχει εφαπτομενική επιτάχυνση ίση με την επιτρόχια επιτάχυνση, η οποία είναι και ίση με την επιτάχυνση του άκρου Α. Αλλά τότε:

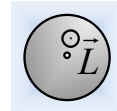


$$a_A = a = Ra_{\gamma\omega\nu} = g = 10 \text{ m/s}^2.$$

- β) Το άκρο Α του νήματος κινείται με σταθερή επιτάχυνση, οπότε για την μετατόπισή του, ίση με το μήκος του νήματος που ξετυλίγεται ισχύει:

$$\Delta x_A = \Delta \ell = \frac{1}{2} at^2 \rightarrow t = \sqrt{\frac{2(\Delta \ell)}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8}{10}} \text{ s} = 0,4 \text{ s}$$

Οπότε η στροφορμή του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του, είναι ένα διάνυσμα πάνω στον άξονα περιστροφής, με φορά προς τα έξω (σχήμα) και μέτρο:



$$L = I\omega = \frac{1}{2} MR^2 \omega = \frac{1}{2} MR(R\omega) = \frac{1}{2} MRv_A = \frac{1}{2} MR \cdot at$$

Λαμβάνοντας τώρα υπόψη ότι $w=Mg$ και $A_1=\pi R^2$, παίρνουμε:

$$L = \frac{1}{2} \frac{w}{g} \cdot \sqrt{\frac{A_1}{\pi}} \cdot gt = \frac{1}{2} w \cdot \sqrt{\frac{A_1}{\pi}} \cdot t = \frac{1}{2} 200 \sqrt{\frac{0,05}{3,14}} \cdot 0,4 \text{ kgm}^2 / \text{s} \approx 5 \text{ kgm}^2 / \text{s}$$

Σχόλια.

- 1) Η δύναμη F που ασκείται στον κύλινδρο από το νερό ονομάζεται Άνοση και θα μπορούσε να υπολογιστεί απευθείας από την εξίσωση $A=\rho g V_{\beta\omega\theta}$, όπου $V_{\beta\omega\theta}$ ο βυθισμένος όγκος του κυλίνδρου.
- 2) Στο ii) ερώτημα θα μπορούσαμε να κάνουμε την αντίθετη υπόθεση, δηλαδή ότι το νήμα χαλαρώνει, με αποτέλεσμα να μηδενίζεται η τάση. Για να συμβαίνει κάτι τέτοιο, θα έπρεπε η επιτάχυνση του άκρου Β να ήταν μεγαλύτερη της επιτάχυνσης του κυλίνδρου, που θα ήταν ίση με g και με φορά προς τα κάτω. Αλλά τότε από την (1) θα είχαμε $-3Mg = 2Mla_{\gamma\omega\nu}$ πράγμα που σημαίνει ότι το άκρο Β επιταχύνεται προς τα πάνω, ενώ ο κύλινδρος προς τα κάτω και το νήμα αντί να χαλαρώνει... τεντώνεται.

Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Λιονύσης Μάργαρης