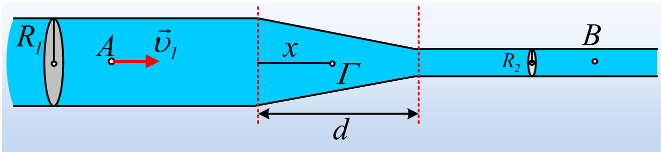
Η ροή στο στένωμα του σωλήνα.

Ένας οριζόντιος κυλινδρικός σωλήνας ακτίνας R_1=8cm κάποια στιγμή παρουσιάζει ένα στένωμα (σχήματος κόλουρου κώνου), μήκους d=0,4m, καταλήγοντας σε δεύτερο κυλινδρικό σωλήνα ακτίνας R_2=4cm. Στο σύστημα έχουμε μια μόνιμη και στρωτή ροή, όπου η ταχύτητα ροής στο σημείο Α είναι υ_1=0,9m/s ενώ η πίεση p_1=8.000N/m^2.



i) Να υπολογιστεί η ταχύτητα ροής καθώς και η πίεση στο σημείο Β του στενού σωλήνα.

ii) Ένα σημείο Γ, βρίσκεται στον άξονα των δύο σωλήνων, στο μέσον του στενώματος, απέχοντας κατά x=0,2m από το τέλος του φαρδιού σωλήνα.

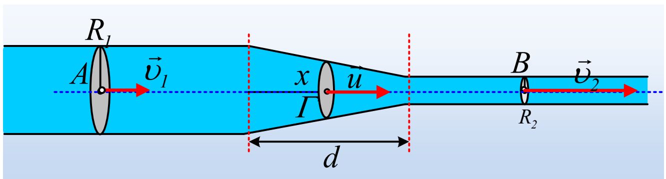
α) Να υπολογισθεί η ταχύτητα ροής στο σημείο Γ.

β) Να βρεθεί η μεταβολή της κινητικής ενέργειας μιας μικρής ποσότητας ρευστού, όγκου 0,2cm^3 κατά την μετακίνησή της, από το σημείο Α στο Γ.

γ) Ποια η τιμή της πίεσης στο σημείο Γ;

Το ρευστό θεωρείται ασυμπίεστο και ιδανικό, έχοντας πυκνότητα ρ=1.000kg/m^3.

Απάντηση:



i) Από την εξίσωση της συνέχειας για τις διατομές των δύο σωλήνων στα σημεία Α και Β παίρνουμε:

$$A_A \cdot \upsilon_1 = A_B \cdot \upsilon_2 \to \pi R_1^2 \cdot \upsilon_1 = \pi R_2^2 \cdot \upsilon_2 \to$$

$$\upsilon_2 = \frac{R_1^2}{R_2^2} \cdot \upsilon_1 = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 \cdot \upsilon_1 = \left(\frac{8cm}{4cm}\right)^2 \cdot 0{,}9m/s = 3{,}6m/s$$

Εφαρμόζοντας τώρα την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Β της ρευματικής γραμμής του παραπάνω σχήματος:

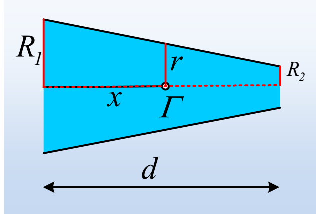
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \to$$

$$p_2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 = 8.000N/m^2 + \frac{1}{2}1000(0{,}9^2 - 3{,}6^2)N/m^2 = 1.925N/m^2.$$

ii) Για να υπολογίσουμε την ταχύτητα στο σημείο Γ, θα εφαρμόσουμε την εξίσωση της συνέχειας μεταξύ των δύο διατομών του παραπάνω σχήματος, στα σημεία Α και Γ:

$$A_A \cdot \upsilon_1 = A_\Gamma \cdot u \rightarrow \pi R_1^2 \cdot \upsilon_1 = \pi r^2 \cdot u \rightarrow R_1^2 \cdot \upsilon_1 = r^2 \cdot u \quad (1)$$

α) Ας έρθουμε τώρα σε μια τομή του στενώματος (του κόλουρου κώνου), σχήματος τραπεζίου με βάσεις $2R_1$ και $2R_2$, όπως στο διπλανό σχήμα. Με βάση το σχήμα, η ακτίνα r της διατομής στο Γ, παίρνοντας τη διάμεσο του τραπεζίου, θα είναι:



$$r = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{8cm + 4cm}{2} = 6cm$$

Και από την (1) παίρνουμε:

$$u = \frac{R_1^2}{r^2} \cdot \upsilon_1 = \frac{8^2}{6^2} \cdot 0{,}9m/s = 1{,}6m/s$$

β) Για μια μάζα ρευστού όγκου V, συνεπώς μάζας m=ρV, η μεταβολή της κινητικής ενέργειας κατά την μετακίνησή της από το Α στο Γ είναι:

$$\Delta K = K_\Gamma - K_A = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}\rho V\left(u^2 - \upsilon_1^2\right) \rightarrow$$

$$\Delta K = \frac{1}{2}\rho V\left(u^2 - \upsilon_1^2\right) = \frac{1}{2}1.000 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-6}\left(1{,}6^2 - 0{,}9^2\right)J = 1{,}75 \cdot 10^{-4}\,J$$

γ) Εφαρμόζοντας ξανά την εξίσωση Bernoulli μεταξύ των σημείων Α και Γ της ρευματικής γραμμής του παραπάνω σχήματος:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = p_\Gamma + \frac{1}{2}\rho u_2^2 \rightarrow$$

$$p_\Gamma = p_1 + \left(\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2\right) = p_1 + \frac{-\Delta K}{V}$$

$$p_\Gamma = p_1 - \frac{\Delta K}{V} = 8.000N/m^2 - \frac{1{,}75 \cdot 10^{-4}}{0{,}2 \cdot 10^{-6}}N/m^2 = 7.125N/m^2$$

Σχόλιο:

Βλέποντας κάποιος το σχήμα και το στένωμα, μπορεί να κάνει τη σκέψη, ότι σε αυτό, αυξάνεται η ταχύτητα από την τιμή 0,9m/s στην τιμή 3,6m/s, οπότε στο μέσον της διαδρομής η ταχύτητα μπορεί να έχει τιμή:

$$u = \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = \frac{0{,}9 + 3{,}6}{2}m/s = 2{,}25m/s$$

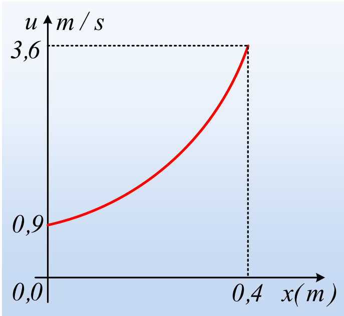
Πράγμα που προφανώς δεν συμβαίνει, όπως δεν συμβαίνει και η τιμή της πίεσης στο Γ να είναι ίση με το ημιάθροισμα:

$$p_\Gamma = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{8.000 + 1.925}{2}N/m^2 = 4.962{,}5\ N/m^2$$

Μην κάνουμε εύκολες και προφανώς λανθασμένες υποθέσεις…

Πράγματι, με τη βοήθεια της γεωμετρίας, προκύπτει ότι η ακτίνα της διατομής σε συνάρτηση με το x, δίνεται από τη σχέση:

$$r(x)=R_2+\frac{d-x}{d}(R_1-R_2)=(8-10x)\quad \text{το } x \text{ σε } (m)\ r \text{ σε } (cm).$$



Αλλά τότε από την εξίσωση της συνέχειας:

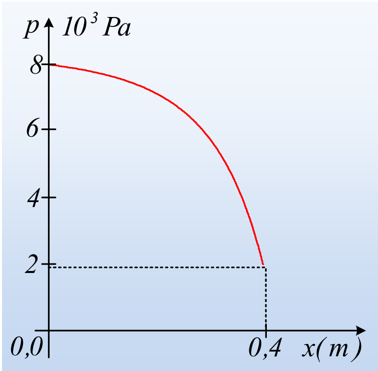
$$u=\frac{R_1^2}{r^2}\cdot\upsilon_1=\frac{8^2}{(8-10x)^2}\cdot 0{,}9m/s=\frac{57{,}6}{(8-10x)^2}m/s$$

Με γραφική παράσταση, όπως στο διπλανό διάγραμμα.

Αλλά τότε από την εξίσωση Bernoulli:

$$p_1+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2=p+\frac{1}{2}\rho u^2\rightarrow$$

$$p=p_1+\frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2-\frac{1}{2}\rho u^2=8.405-500\frac{57{,}6^2}{(8-10x)^4}$$



Με μορφή όπως στο 2^o διάγραμμα.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης