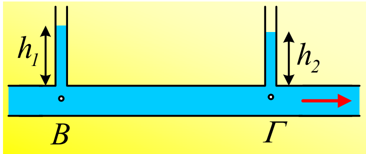
Μια στρωτή ροή.



Σε ένα οριζόντιο σωλήνα σταθερής διατομής 100cm^2 έχουμε μια στρωτή ροή νερού. Σε δύο σημεία Β και Γ, τα οποία απέχουν οριζόντια απόσταση x=4m, συνδέονται δυο λεπτοί κατακόρυφοι σωλήνες, στους οποίους το νερό ανέρχεται σε ύψη h_1=40cm και h_2=39,6cm αντίστοιχα, όπως στο διπλανό σχήμα. Κάποια στιγμή, την οποία θεωρούμε t=0, η παροχή του σωλήνα, είναι $Π_0$=0,2L/s.

i) Να βρεθούν οι ταχύτητες ροής στα σημεία Β και Γ τη στιγμή t=0.

ii) Να υπολογιστούν οι τιμές της πίεσης στα σημεία Β και Γ, καθώς και η διαφορά πίεσης μεταξύ τους.

iii) Να βρεθεί η επιτάχυνση της ποσότητας του νερού, μεταξύ των σημείων Β και Γ.

iv) Να υπολογιστεί η ταχύτητα του νερού στο σημείο Β τη στιγμή t_1=10s , καθώς και ο όγκος του νερού που εξέρχεται από το δεξιό άκρο του σωλήνα μέχρι τη στιγμή t_1, θεωρώντας σταθερά τα ύψη του νερού στους δύο κατακόρυφους σωλήνες.

Το νερό να θεωρηθεί **ιδανικό ασυμπίεστο ρευστό** το οποίο δεν εμφανίζει εσωτερική τριβή ή τριβή με τα τοιχώματα του σωλήνα. Δίνονται επίσης η ατμοσφαιρική πίεση $p_{ατ}$=10^{5}N/m^2, η πυκνότητα του νερού ρ=1.000kg/m^3 και g=10m/s^2.

Απάντηση.

i) Από την εξίσωση της συνέχειας για τα σημεία Β και Γ έχουμε ότι $A_1υ_1=A_2υ_2$. Αλλά αφού ο σωλήνας έχει σταθερή διατομή $A_1=A_2$, τότε και $υ_1=υ_2$. Δηλαδή η ταχύτητα ροής είναι σταθερή σε όλα τα σημεία του σωλήνα του σχήματος. Αλλά τότε:

$$Π_0 = A\cdot υ_0 \rightarrow υ_0 = \frac{Π_0}{A} = \frac{0,2\cdot 10^{-3}m^3/s}{100\cdot 10^{-4}m^2}m/s = 0,02m/s$$

ii) Για τις πιέσεις στα σημεία Β και Γ έχουμε:

$$p_B = p_{ατ} + ρgh_1 = 10^5N/m^2 + 10^3\cdot 10\cdot 0,4N/m^2 = 104.000N/m^2 = 1,040\cdot 10^5N/m^2$$

$$p_Γ = p_{ατ} + ρgh_2 = 10^5N/m^2 + 10^3\cdot 10\cdot 0,396N/m^2 = 103.960N/m^2 = 1,0396\cdot 10^5N/m^2$$

Οπότε η διαφορά πίεσης μεταξύ των σημείων Β και Γ είναι:

$$p_B - p_Γ = 40N/m^2$$

iii) Ας πάρουμε την ποσότητα του νερού μεταξύ των σημείων Β και Γ, σχήματος κυλίνδρου με βάσεις εμβαδού Α. Η μάζα αυτή του νερού, δέχεται δυνάμεις από το υπόλοιπο νερό, όπως στο διπλανό σχήμα, όπου $F_1=p_B\cdot A$ και $F_2=p_Γ\cdot A$. Αλλά τότε από το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα, για την ποσότητα αυτή, μάζας m=ρV=ρAx, θα έχουμε:

$$ΣF = ma \rightarrow a = \frac{F_1-F_2}{m} = \frac{(p_B-p_Γ)A}{ρ(Ax)} = \frac{p_B-p_Γ}{ρx} \rightarrow$$

$$a=\frac{p_B-p_\Gamma}{\rho x}=\frac{40}{1.000\cdot 4}m/s^2=0{,}01m/s^2.$$

iv) Παρατηρούμε ότι το νερό της στήλης μεταξύ Β και Γ, έχει σταθερή επιτάχυνση. Αλλά τότε και κάθε σωματίδιο ρευστού έχει την ίδια αυτή επιτάχυνση, οπότε τη στιγμή t_1=10s, θα έχει αποκτήσει ταχύτητα:

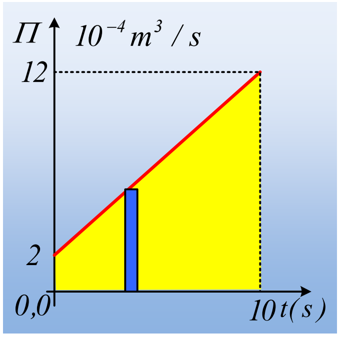
$$\upsilon_1=\upsilon_0+\alpha t_1=0{,}02m/s+0{,}01\cdot 10m/s=0{,}12m/s.$$

Οπότε η παροχή του σωλήνα στο παραπάνω χρονικό διάστημα από 0-10s, δεν είναι σταθερή, αλλά δίνεται από την σχέση:

$$\Pi=A\cdot\upsilon=A(\upsilon_0+at)=10^{-2}\left(0{,}02+0{,}01t\right)=2\cdot 10^{-4}+1\cdot 10^{-4}t \quad \text{(S.I.)}$$

Εξάλλου η παροχή δίνεται από την εξίσωση:

$$\Pi=\frac{\Delta V}{\Delta t}\to\Delta V=\Pi\cdot\Delta t\,,$$



οπότε κάνοντας το διάγραμμα Π-t, το μπλε εμβαδόν για το χρονικό διάστημα Δt, είναι αριθμητικά ίσο με τον όγκο του νερού που εξέρχεται από το σωλήνα, σε αυτό το χρονικό διάστημα. Χωρίζοντας όμως το χρονικό διάστημα των 10s, σε πολύ μικρά Δt, το άθροισμα των εμβαδών, θα μας δώσει το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τραπεζίου, το οποίο θα είναι αριθμητικά ίσο με τον συνολικό όγκο του νερού.

$$V_{o\lambda}=\frac{(2+12)\cdot 10^{-4}m^3/s}{2}10s=7\cdot 10^{-3}m^3=7L$$

Υλικό Φυσικής-Χημείας
Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης