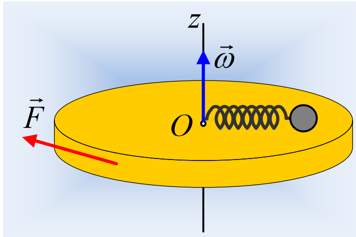
Ένα σύστημα σωμάτων σε περιπέτειες…



Μια οριζόντια κυκλική πλατφόρμα μάζας M=20kg και ακτίνας R=2m, στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα z, χωρίς τριβές, ο οποίος περνά από το κέντρο της O με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω=2rad/s. Πάνω στην πλατφόρμα είναι τοποθετημένη μια μικρή σφαίρα (αμελητέων διαστάσεων) και μάζας m=2kg, η οποία είναι δεμένη στο ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=100N/m και φυσικού μήκους l_0=92cm, το άλλο άκρο του οποίου δένεται στον άξονα περιστροφής. Μεταξύ σφαίρας και πλατφόρμας δεν αναπτύσσονται τριβές, ενώ η σφαίρα στρέφεται μαζί με την πλατφόρμα, χωρίς να μεταβάλλεται η θέση της ως προς αυτήν.

i) Το μήκος του ελατηρίου είναι:

α) $\ell < \ell_0$, β) $\ell = \ell_0$, γ) $\ell > \ell_0$.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

ii) Να υπολογιστεί η στροφορμή κάθε σώματος (πλατφόρμα-σφαίρα), καθώς και η στροφορμή του συστήματος κατά (ως προς) τον άξονα z.

Σε μια στιγμή t_0=0, ασκείται εφαπτομενικά στην πλατφόρμα μια οριζόντια, σταθερού μέτρου δύναμη F=10N, όπως στο παραπάνω σχήμα.

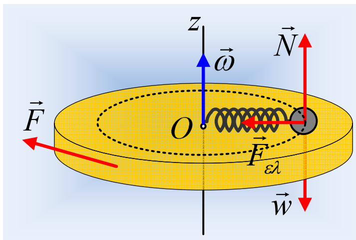
iii) Να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής της στροφορμής κατά (ως προς) τον άξονα z:

α) του συστήματος, β) της σφαίρας, γ) της πλατφόρμας.

iv) Να υπολογιστεί η στροφορμή κάθε σώματος (πλατφόρμα-σφαίρα), καθώς και η στροφορμή του συστήματος κατά (ως προς) τον άξονα z, τη στιγμή t_1=5s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας, ως προς τον άξονά της I= ½ MR^2.

Απάντηση:



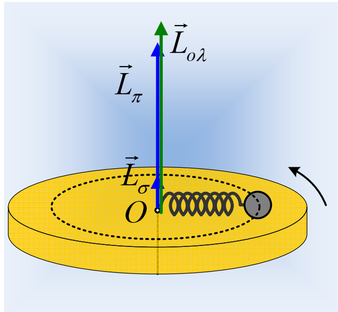
i) Η σφαίρα στρέφεται μαζί με την πλατφόρμα διαγράφοντας έναν κύκλο ακτίνας r με κέντρο το κέντρο O της πλατφόρμας. Σχεδιάζοντας τις δυνάμεις που ασκούνται στην σφαίρα, εκτός του βάρους και της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου N, πρέπει να ασκείται και δύναμη από το ελατήριο, η $F_{ελ}$, η οποία να «παίζει το ρόλο» της κεντρομόλου. Αλλά για να ασκείται δύναμη με φορά όπως στο σχήμα, το ελατήριο θα πρέπει να έχει επιμηκυνθεί, συνεπώς $\ell > \ell_0$. Σωστό το γ).

ii) Έστω ℓ το μήκος του ελατηρίου, οπότε η σφαίρα διαγράφει κυκλική τροχιά ακτίνας r=ℓ με ταχύτητα υ=ωr=ωℓ και η δύναμη του ελατηρίου λειτουργεί ως κεντρομόλος, οπότε:

$$F_{\varepsilon\lambda} = m\frac{\upsilon^2}{r} \rightarrow$$

$$k\Delta\ell = m\frac{\omega^2\ell^2}{\ell} \rightarrow k(\ell - \ell_0) = m\omega^2\ell \rightarrow k\ell - k\ell_0 = m\omega^2\ell \rightarrow$$

$$\ell = \frac{k\ell_0}{k - m\omega^2} = \frac{100\cdot 0{,}92}{100 - 2\cdot 2^2}m = 1m$$



Επομένως η σφαίρα εκτελεί κυκλική κίνηση ακτίνας r=1m με ταχύτητα υ=ωr=2m/s, έχοντας στροφορμή κατά τον άξονα με φορά προς τα πάνω και μέτρο:

$$L_\sigma = m\upsilon r = 2\cdot 2\cdot 1kgm^2/s = 4kgm^2/s$$

Εξάλλου και η πλατφόρμα έχει στροφορμή κατακόρυφη, ίδιας φοράς με μέτρο:

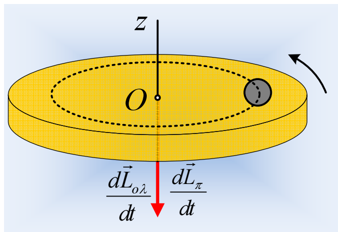
$$L_\pi = I\omega = \frac{1}{2}MR^2\omega = \frac{1}{2}20\cdot 2^2\cdot 2kgm^2/s = 80kgm^2/s$$

Αλλά τότε το σύστημα πλατφόρμα-σφαίρα έχει συνολική στροφορμή:

$$\vec{L}_{o\lambda} = \vec{L}_\pi + \vec{L}_\sigma \rightarrow L = L_\pi + L_\sigma = (80+4)\ kgm^2/s = 84\ kgm^2/s.$$

Κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω, όπως στο σχήμα.

iii) Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι τα βάρη, η δύναμη από τον άξονα και η οριζόντια δύναμη F. Ροπή ως προς τον άξονα, έχει μόνο η δύναμη F, οπότε, θωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική έχουμε:



$$\frac{dL_{o\lambda}}{dt} = \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} \rightarrow$$

$$\frac{dL_{o\lambda}}{dt} = -FR = -10\cdot 2kg\cdot m^2/s^2 = -20kg\cdot m^2/s^2$$

Όπου η αρνητική τιμή σημαίνει ότι το διάνυσμα $\frac{d\vec{L}_{o\lambda}}{dt}$ έχει φορά προς τα κάτω, όπως στο διπλανό σχήμα.

Για την πλατφόρμα έχουμε:

$$\frac{dL_\pi}{dt} = \Sigma\tau \rightarrow \frac{dL_\pi}{dt} = \tau_w + \tau_{F_{\alpha\xi}} + \tau_{N'} + \tau_F$$

Όπου οι ροπές, του βάρους, της δύναμης από τον άξονα και της αντίδρασης της Ν (που έχουμε σχεδιάσει στο πρώτο σχήμα) είναι μηδενικές, άρα:

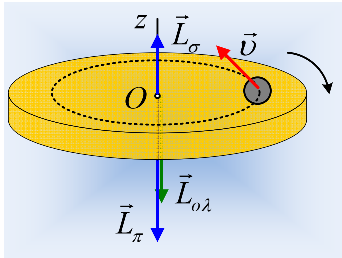
$$\frac{dL_\pi}{dt} = \tau_F = -FR = -20kg\cdot m^2/s^2.$$

Ενώ στη σφαίρα δεν ασκείται κάποια δύναμη που να έχει ροπή ως προς τον άξονα z, συνεπώς:

$$\frac{dL_\sigma}{dt} = \Sigma\tau = 0$$

Πράγμα άλλωστε αναμενόμενο, αφού το (διανυσματικό) άθροισμα των δύο ρυθμών για πλατφόρμα-σφαίρα, θα πρέπει να είναι ίσο με τον ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του συστήματος!

iv) Οι παραπάνω ρυθμοί μεταβολής της στροφορμής παραμένουν σταθεροί, οπότε από το γενικευμένο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:



$$\frac{dL}{dt} = \Sigma\tau \rightarrow \frac{L - L_0}{t - t_0} = \Sigma\tau \rightarrow L = L_0 + \Sigma\tau \cdot t$$

Οπότε έχουμε αναλυτικά για τα σώματα:

Σφαίρα: $L_\sigma = L_0 + \Sigma\tau \cdot t = L_0 + 0 \cdot t = L_0 = 4kgm^2/s$

Πλατφόρμα: $L\pi = L_0 + \Sigma\tau \cdot t = L_0 - FR \cdot t = 80kgm^2/s - 20 \cdot 5kgm^2/s = -20kgm^2/s$

Σύστημα: $L_{o\lambda} = L_0 + \Sigma\tau_{\varepsilon\xi} \cdot t = L_{o\lambda} - FR \cdot t = 84kgm^2/s - 20 \cdot 5kgm^2/s = -16kgm^2/s$

Σχόλιο:

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό, ότι η άσκηση της δύναμης F, έχει σαν αποτέλεσμα τη μεταβολή της στροφορμής της πλατφόρμας, χωρίς να αλλάζει κάτι στην κίνηση της σφαίρας, η οποία συνεχίζει να κινείται όπως και αρχικά με ταχύτητα μέτρου υ=2m/s. Αντίθετα η πλατφόρμα τη στιγμή t=5s, στρέφεται με αντίθετη πια φορά, αφού η ροπή τη δύναμης προκάλεσε αρχικά επιβράδυνσή της και στη συνέχεια επιτάχυνσής της με φορά ίδια με τη φορά της ροπής, δηλαδή προς τα κάτω ή αν προτιμάται η πλατφόρμα τελικά στρέφεται με τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού.

Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης