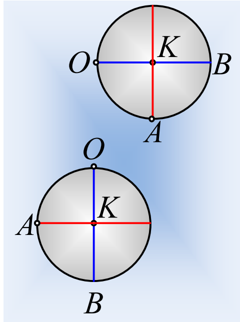
# Ένας περιστρεφόμενος δίσκος αποδεσμεύεται.




Ένας ομογενής δίσκος, μάζας M=6kg και ακτίνας R=0,6m μπορεί να περιστρέφεται, χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από ένα σημείο Ο της περιφέρειάς του, σε ύψος H=1,6m από το έδαφος. Φέρνουμε το δίσκο στη θέση του πρώτου σχήματος, ώστε η διάμετρος ΟΒ να είναι οριζόντια και τον αφήνουμε να κινηθεί.

i) Να υπολογιστεί η αρχική γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου, καθώς και η αρχική επιτάχυνση του σημείου Α, στο άκρο της κατακόρυφης διαμέτρου του.

ii) Μετά από λίγο η διάμετρος ΟΒ γίνεται κατακόρυφη, όπως στο δεύτερο σχήμα. Για την θέση αυτή να βρεθούν:

α) Η στροφορμή του δίσκου κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής του.

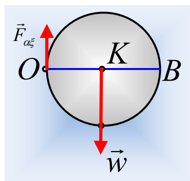
β) Ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του δίσκου.

γ) η επιτάχυνση του σημείου Α.

iii) Αν τη στιγμή που ο δίσκος βρίσκεται στην παραπάνω θέση, αποδεσμεύεται από τον άξονα περιστροφής του και πέφτει ελεύθερα να υπολογίσετε την κινητική του ενέργεια τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10m/s^2$, ενώ η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του $I= ½ MR^2$.

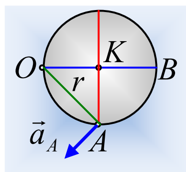
### *Απάντηση:*




i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο, μόλις αφεθεί να κινηθεί. Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση του στερεού, παίρνοντας ως θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, παίρνουμε:

$$\Sigma\tau = I_o \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow\ w \cdot R = \left(\frac{1}{2}MR^2 + MR^2\right)a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{2g}{3R} = \frac{2\cdot 10}{3\cdot 0,6}rad/s^2 = \frac{100}{9}rad/s^2.$$

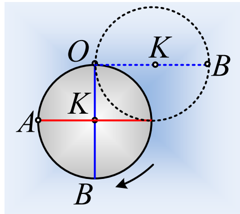



Με διεύθυνση αυτή του άξονα και φορά προς τα μέσα στο σχήμα.

Αλλά τότε το σημείο Α έχει επιτάχυνση (επιτρόχια) κάθετη στην ακτίνα περιστροφής του r, όπως στο 2ο σχήμα, μέτρου:

$$a_A = a_{\gamma\omega\nu}r = a_{\gamma\omega\nu}\sqrt{R^2+R^2} = a_{\gamma\omega\nu}R\sqrt{2} = \frac{100}{9}\cdot 0,6\sqrt{2}m/s^2 = \frac{20\sqrt{2}}{3}m/s^2.$$

ii) Για την κίνηση του δίσκου από την αρχική του θέση, μέχρι τη θέση όπου η διάμετρος ΟΒ γίνεται κατακόρυφη, η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή, αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο, είναι το βάρος. Έτσι θεωρώντας τη δυναμική ενέργεια μηδενική, στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από την τελική θέση του κέντρου K , έχουμε:




$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\rightarrow$$

$$MgR=\frac{1}{2}I_o\omega^2 \rightarrow MgR=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2+MR^2\right)\omega^2 \rightarrow$$

$$\omega=\sqrt{\frac{4g}{3R}}=\sqrt{\frac{4\cdot 10}{3\cdot 0{,}6}}rad/s=\frac{10\sqrt{2}}{3}rad/s\,.$$

α) Η στροφορμή του δίσκου κατά (ως προς τον) άξονα περιστροφής, έχει τη διεύθυνση του άξονα με φορά προς τα μέσα στο σχήμα και μέτρο:

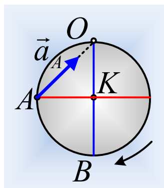
$$L=I_o\omega=\left(\frac{1}{2}MR^2+MR^2\right)\omega=\frac{3}{2}MR^2\omega=\frac{3}{2}6\cdot 0{,}6^2\cdot\frac{10\sqrt{2}}{3}kgm^2/s=10{,}8\sqrt{2}kgm^2/s.$$

β) Για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του δίσκου, ως προς τον άξονα περιστροφής του, έχουμε:

$$\frac{dL}{dt}=\Sigma\tau=\tau_w+\tau_{F_{αξ}}=0$$

Αφού ο φορέας του βάρους περνά από τον άξονα περιστροφής.

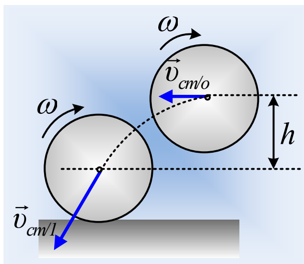
γ) Στην θέση αυτή, δεν ασκείται κάποια ροπή στον δίσκο, συνεπώς δεν έχει γωνιακή επιτάχυνση, οπότε η μόνη επιτάχυνση που έχει το σημείο Α, είναι η κεντρομόλος επιτάχυνση, εξαιτίας της κυκλικής κίνησής του γύρω από το Ο, με μέτρο:




$$a_A=\omega^2 r=\omega^2 R\sqrt{2}=\left(\frac{10\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot 0{,}6\sqrt{2}m/s^2=\frac{40\sqrt{2}}{3}m/s^2.$$

Προφανώς η διεύθυνσή της κατευθύνεται προς το Ο ή αν προτιμάτε σχηματίζει γωνία 45° με την οριζόντια διεύθυνση.

iii) Μόλις ο δίσκος αποδεσμευτεί από τον άξονα, εκτελεί ***οριζόντια βολή*** με αρχική ταχύτητα του κέντρου K, $υ_o=\omega R$ και με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, αφού δεν δέχεται κάποια ροπή. Αλλά χωρίς να είναι απαραίτητη η μελέτη της οριζόντιας βολής, εφαρμόζοντας τη διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, παίρνουμε, (θεωρούμε τώρα τη δυναμική ενέργεια μηδενική στο οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο του δίσκου, τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος), όπου h=H-2R=0,4m:




$$K_{αρχ}+U_{αρχ}=K_{τελ}+U_{τελ}\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}M\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_K\omega^2 + Mgh = K_{\tau\varepsilon\lambda} \rightarrow$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}M(\omega R)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\omega^2 + Mgh \rightarrow$$

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right)\omega^2 + Mgh = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}6\cdot 0,6^2\right)\left(\frac{10\sqrt{2}}{3}\right)^2 J + 6\cdot 10\cdot 0,4J = 60J$$

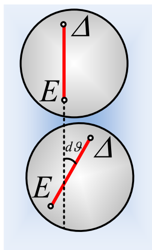
**Σχόλια:**

1) Αξίζει να προσεχθεί η παραπάνω σχέση. Ξεκινήσαμε θεωρώντας την κίνηση του δίσκου, ως σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα $\upsilon_{cm}$ και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το κέντρο του δίσκου Κ. Αλλά με την αντικατάσταση φτάσαμε στη σχέση:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}MR^2\right)\omega^2$$

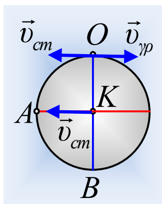
Η οποία δεν είναι τίποτα άλλο από την κινητική ενέργεια του δίσκου, θεωρώντας ότι αυτός εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από τον άξονα στο Ο, ελάχιστα πριν την αποδέσμευση!!! Προφανώς η αποδέσμευση του δίσκου από τον άξονα, δεν συνοδεύεται από κάποια ενεργειακή μεταβολή.

2) Η γωνιακή ταχύτητα ω που υπολογίσαμε στο ii) ερώτημα, για την στροφική κίνηση γύρω από τον άξονα στο Ο, είναι η ίδια γωνιακή ταχύτητα που έχει ο δίσκος και για την περιστροφή του γύρω από τον άξονά του που περνά από το κέντρο του Κ (μετά την απελευθέρωσή του). Η γωνιακή ταχύτητα δεν συνδέεται με κάποιον άξονα, αλλά με την αλλαγή της διεύθυνσης π.χ. ενός ευθύγραμμου τμήματος ΔΕ, όπως στο σχήμα, αφού:




$$\omega = \frac{d\vartheta}{dt}$$

3) Ελάχιστο χρόνο πριν την αποδέσμευση του δίσκου, το κέντρο Κ έχει ταχύτητα $\upsilon_o$=ωR. Κάθε κίνηση στερεού, μπορούμε να την θεωρήσουμε ως σύνθετη, μια μεταφορική και μια περιστροφική γύρω από άξονα που περνά από το Κ! Τότε όμως το σημείο Ο, έχει τις ταχύτητες που φαίνονται στο σχήμα, όπου $\upsilon_{\gamma\rho}$=ωR, συνεπώς η ταχύτητα του Ο είναι μηδενική. Μηδενική είναι και αμέσως μετά την αποδέσμευση… Μήπως το τελευταίο «θυμίζει» κύλιση με τη διαφορά ότι μηδενική ταχύτητα έχει το πάνω και όχι το κάτω σημείο;




**Υλικό Φυσικής-Χημείας**
*Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…*

Επιμέλεια:

***Διονύσης Μάργαρης***