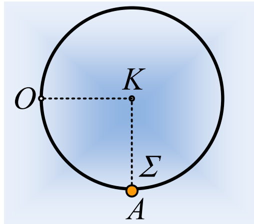
Η στεφάνη και η σημειακή μάζα.



Μια στεφάνη ακτίνας 0,2m και μάζας m=1kg, η οποία θεωρείται συγκεντρωμένη στην περιφέρειά της, μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές, σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα ο οποίος περνά από ένα σημείο Ο της περιφέρειάς της. Σε ένα σημείο Α της περιφέρειας της στεφάνης, όπου η γωνία ΟΚΑ είναι ορθή, έχει προσδεθεί ένα σώμα Σ, ίσης μάζας με τη στεφάνη, το οποίο θεωρείται υλικό σημείο, δημιουργώντας έτσι το στερεό s. Στρέφουμε το στερεό s, ώστε η ακτίνα της ΚΑ της στεφάνης να είναι κατακόρυφη και σε μια στιγμή (t_0=0) το αφήνουμε να περιστραφεί.

i) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του στερεού s, ως προς τον άξονα περιστροφής στο Ο.

ii) Ποια η αρχική επιτάχυνση του σώματος Σ, μόλις αφήσουμε το στερεό να κινηθεί;

iii) Μετά από λίγο, τη στιγμή t_1, η ακτίνα ΚΑ γίνεται οριζόντια για πρώτη φορά.

Για τη στιγμή αυτή να βρεθούν:

α) Η γωνιακή ταχύτητα του στερεού και η ταχύτητα του σώματος Σ.

β) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του στερεού s, ως προς τον άξονα περιστροφής του.

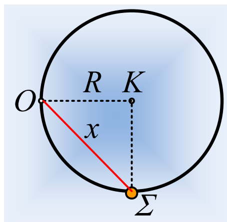
γ) Η στροφορμή και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του σώματος Σ, ως προς το σημείο Ο.

δ) Η κινητική ενέργεια και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας, του στερεού s.

ε) Η κινητική ενέργεια και ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας, του σώματος Σ.

Δίνεται g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Η ροπή αδράνειας του στερεού s είναι ίση με το άθροισμα:

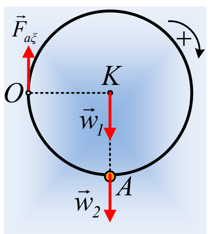
$$I_s = \sum m_i r_i^2 + m_\Sigma x^2$$

Όπου το άθροισμα είναι η ροπή αδράνειας της στεφάνης I_1, ενώ για την απόσταση του σώματος Σ από τον άξονα $x^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$.

Αλλά από θεώρημα Steiner για τη στεφάνη, έχουμε:

$$I_1 = I_{1K} + mR^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2 \text{, οπότε:}$$

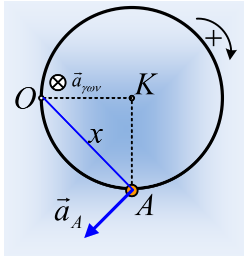
$$I_s = \sum m_i r_i^2 + m_\Sigma x^2 = 2mR^2 + 2mR^2 = 4mR^2 = 4 \cdot 1 \cdot 0{,}2^2\, kgm^2 = 0{,}16 kgm^2.$$



ii) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο στερεό s, τη στιγμή t=0, αμέσως μόλις αφεθεί να κινηθεί. Εφαρμόζοντας το 2^{ο} νόμο του Νεύτωνα και με θετική τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού, παίρνουμε:

$$\Sigma\tau_O = I_s \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow w_1R + w_2R = I_s \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu/1} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu/1} = \frac{2mgR}{I_s} = \frac{2\cdot 1\cdot 10\cdot 0{,}2}{0{,}16} rad/s^2 = 25 rad/s^2.$$

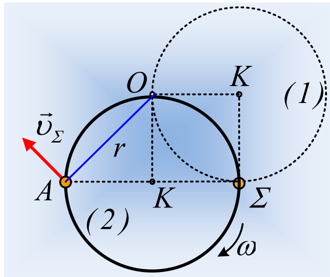


Οπότε το σώμα Σ έχει (επιτρόχια) επιτάχυνση, κάθετη στην ακτίνα (ΟΑ) περιστροφής του και μέτρου:

$$\alpha_A = \alpha_{\gamma\omega\nu/1} \cdot x \rightarrow$$

$$a_A = \alpha_{\gamma\omega\nu/1} \cdot R\sqrt{2} = 25\cdot 0{,}2\sqrt{2} m/s^2 = 5\sqrt{2} m/s^2$$

iii) Στο διπλανό σχήμα φαίνονται η αρχική θέση (1) και η τελική (2), όπου η ακτίνα ΚΑ γίνεται οριζόντια.



α) Εφαρμόζουμε ΑΔΜΕ για το στερεό s, λαμβάνοντας ως επίπεδο μηδενικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο Κ της στεφάνης, στην θέση (2):

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \rightarrow$$

$$0 + mgR = \tfrac{1}{2} I_s \cdot \omega^2 + 0 \rightarrow$$

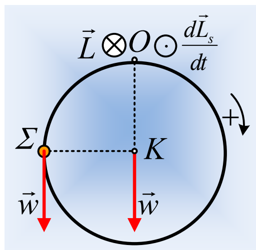
$$\omega = \sqrt{\frac{2mgR}{I_s}} = \sqrt{\frac{2\cdot 1\cdot 10\cdot 0{,}2}{0{,}16}} rad/s = 5 rad/s.$$

Αλλά τότε το σώμα Σ έχει ταχύτητα λόγω της κυκλικής κίνησής του γύρω από το Ο, μέτρου:

$$\upsilon_\Sigma = \omega r = \omega R\sqrt{2} = 5\cdot 0{,}2\sqrt{2} m/s = \sqrt{2} m/s$$

Κάθετη στην ΟΑ, όπως στο σχήμα.

β) Στη θέση (2) το στερεό s έχει στροφορμή πάνω στον άξονα περιστροφής του, με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο περιστροφής και φορά προς τα μέσα, με μέτρο:



$$L_s = I_s\omega = 0{,}16\cdot 5 kgm^2/s = 0{,}8 kgm^2/s.$$

Αντίθετα για το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του ως προς τον άξονα στο Ο, έχουμε:

$$\frac{dL_s}{dt} = \Sigma\tau = -mgR = -1\cdot 10\cdot 0{,}2 kgm^2/s^2 = -2 kgm^2/s^2.$$

Με διεύθυνση του άξονα και φορά προς τα έξω (προς τον αναγνώστη), όπως στο σχήμα.

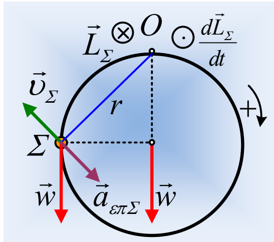
γ) Για το σώμα Σ, το οποίο έχει ταχύτητα υ_Σ και διαγράφει κυκλική τροχιά $r = R\sqrt{2}$ γύρω από το σημείο Ο, η στροφορμή βρίσκεται στην κάθετη στο επίπεδο της σελίδας που περνά από το Ο (πάνω στον άξονα περιστροφής…) με φορά προς τα μέσα και μέτρο:

$$L_\Sigma = m\upsilon r = 1\cdot\sqrt{2}\cdot 0{,}2\sqrt{2}kgm^2/s = 0{,}4kgm^2/s\,.$$

Ενώ ο αντίστοιχος ρυθμός μεταβολής της στροφορμής, έχει τιμή:

$$\frac{dL_\Sigma}{dt} = \frac{d(m|\upsilon|r)}{dt} = m\frac{d|\upsilon|}{dt}r = ma_{\varepsilon\pi}\cdot r = ma_{\gamma\omega\nu/2}r^2 = 2ma_{\gamma\omega\nu/2}R^2\,.$$

Όμως με εφαρμογή του 2ου νόμου του Νεύτωνα για το στερεό s και για την θέση (2) παίρνουμε:



$$\Sigma\tau = I_s a_{\gamma\omega\nu/2} \rightarrow -mgR = I_s\cdot a_{\gamma\omega\nu/2} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu/2} = -\frac{mgR}{I_s} = -\frac{1\cdot 10\cdot 0{,}2}{0{,}16}rad/s^2 = -12{,}5rad/s^2\,.$$

Η τιμή αυτή μας λέει ότι το στερεό επιβραδύνεται και η επιτρόχια επιτάχυνση του Σ έχει αντίθετη φορά από την ταχύτητά του, έτσι:

$$\frac{dL_\Sigma}{dt} = 2\cdot 1\cdot(-12{,}5)\cdot 0{,}2^2\,kgm^2/s^2 = -1kgm^2/s^2\,.$$

Με την ίδια διεύθυνση και φορά προς τα έξω, όπως στο σχήμα.

δ) Η κινητική ενέργεια του στερεού s έχει τιμή:

$$K_s = \frac{1}{2}I_s\omega^2 = mgR = 1\cdot 10\cdot 0{,}2J = 2J$$

Ενώ ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας:

$$\frac{dK_s}{dt} = P_\tau = \tau\omega = -mgR\cdot\omega = -1\cdot 10\cdot 0{,}2\cdot 5J/s = -10J/s$$

ε) Οι αντίστοιχες τιμές για το σώμα Σ:

$$K_\Sigma = \frac{1}{2}m\upsilon_\Sigma^2 = \frac{1}{2}1\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2 J = 1J \text{ και}$$

$$\frac{dK_\Sigma}{dt} = \left(\Sigma F_{\varepsilon\varphi}\right)\cdot\upsilon_\Sigma\sigma\upsilon\nu 180^o = -m|a_{\varepsilon\pi}|\upsilon_\Sigma = -m\,|a_{\gamma\omega\nu/2}|\,r\cdot\upsilon_\Sigma \rightarrow$$

$$\frac{dK_\Sigma}{dt} = -m\,|a_{\gamma\omega\nu/2}|\,R\sqrt{2}\cdot\upsilon_\Sigma = -1\cdot 12{,}5\cdot 0{,}2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}J/s = -5J/s$$

Σχόλια.

1) Και αν στο τελευταίο ερώτημα μας ζητούσαν το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της στεφάνης; Τότε θα είχαμε:

$$\frac{dK_\sigma}{dt} = (\Sigma\tau)\omega = I_1 a_{\gamma\omega\nu}\omega = 2mR^2 a_{\gamma\omega\nu}\omega = 2\cdot 1\cdot 0{,}2^2\cdot(-12{,}5)\cdot 5J/s = -5J/s$$

Αξίζει να προσέξουμε ότι η κινητική ενέργεια του στερεού μειώνεται κατά 10J/s. Από αυτά, τα 5J/s της στεφάνης και τα υπόλοιπα 5J/s του σώματος Σ.

2) Αλλά και αν θέλαμε το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της στεφάνης, στο υποερώτημα

γ) θα είχαμε:

$$\frac{dL_1}{dt} = \Sigma\tau_1 = I_1 a_{\gamma\omega\nu} = 2mR^2 a_{\gamma\omega\nu} = 2 \cdot 1 \cdot 0{,}2^2 \cdot (-12{,}5) = -1kgm^2 / s^2 .$$

Κάτι αντίστοιχο και με τους ρυθμούς μεταβολής της στροφορμής! Ο συνολικός ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του στερεού έχει τιμή -2kgm^2/s^2, όπου -1 kgm^2/s^2 για τη στεφάνη και -1 kgm^2/s^2 για το σώμα Σ.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης