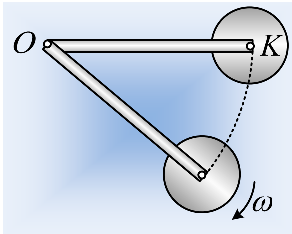
Η κινητική ενέργεια σε ένα σύστημα.

Τρεις …παρόμοιες ερωτήσεις.



1) Το άκρο Κ μιας ομογενούς ράβδου, μήκους ℓ=4R και μάζας M=3m, έχει καρφωθεί στο κέντρο ενός δίσκου, μάζας m και ακτίνας R, δημιουργώντας ένα στερεό s, το οποίο μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα ο οποίος περνάει από το άκρο Ο της ράβδου. Αφήνουμε το στερεό να περιστραφεί από μια θέση που η ράβδος είναι οριζόντια και μετά από λίγο έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα ω. Για τη θέση αυτή:

   i) Ποιες από τις παρακάτω σχέσεις που δίνουν κινητική ενέργεια είναι σωστές και ποιες λάθος:

   α) $K_ρ= ½\ Mυ^2_{cm}$, β) $K_ρ= ½\ I_{1,O}·ω^2$, γ) $K_ρ= ½\ Mυ^2_{cm} + ½\ I_{1cm}·ω^2$.

   δ) $K_δ=½\ mυ_K^2$, ε) $K_δ= ½\ mυ_K^2 + ½\ I_{2cm}·ω^2$, στ) $K_δ= ½\ I_{2,O}·ω^2$.

   ii) Ο λόγος της κινητικής ενέργειας του δίσκου προς την κινητική ενέργεια του στερεού $K_δ/K_s$ είναι ίσος με:

   α) 16/35, β) 27/55, γ) 33/65.

Δίνονται οι ροπές αδράνειας των στερεών ως προς κάθετους άξονες που διέρχονται από τα κέντρα μάζας, για τη ράβδο $I_1= Mℓ^2/12$ και για το δίσκο $I_2= ½\ mR^2$.

Απάντηση:

i) Η ράβδος εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από το άκρο της Ο, συνεπώς η κινητική της ενέργεια δεν μπορεί να υπολογίζεται από την εξίσωση $K_ρ = \frac{1}{2}Mυ^2_{cm}$ (α:Λάθος) αφού η εξίσωση ισχύει μόνο για μεταφορική κίνηση. Έτσι η κινητική ενέργεια δίνεται από την εξίσωση:

$$K_ρ = \frac{1}{2}I_o ω^2$$

Και η β) πρόταση είναι σωστή.

Αλλά η παραπάνω εξίσωση γράφεται και:

$$K_ρ = \frac{1}{2}I_o ω^2 = \frac{1}{2}\left(I_{cm} + Md^2\right)ω^2 = \frac{1}{2}I_{cm}ω^2 + \frac{1}{2}M(dω)^2$$

Αλλά $υ_{cm}=ω·d$, όπου $d=\frac{ℓ}{2}$ και η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$K_ρ = \frac{1}{2}Mυ^2_{cm} + \frac{1}{2}I_{cm}ω^2$$

Συνεπώς και η γ) πρόταση είναι σωστή, αντιμετωπίζοντας την κίνηση της ράβδου ως σύνθετη, μια μεταφορική με ταχύτητα $υ_{cm}$ και μια στροφική γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το μέσον της (το κέντρο μάζας).

Με την ίδια συλλογιστική και για το δίσκο έχουμε:

δ) Λάθος, ε) Σωστή και στ) Σωστή.

ii) Με βάση τα παραπάνω η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι ίση:

$$K_\delta = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}m\cdot(\omega\ell)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2}m\cdot R^2\omega^2 \rightarrow$$

$$K_\delta = \frac{1}{2}m\cdot 16R^2\omega^2 + \frac{1}{4}m\cdot R^2\omega^2 = 8{,}25mR^2\omega^2$$

Ενώ για τη ράβδο:

$$K_\rho = \frac{1}{2}I_o\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}M\ell^2 + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{3}M\ell^2\omega^2 = \frac{1}{6}3m\cdot 16R^2\omega^2 = 8mR^2\omega^2$$

Συνεπώς η κινητική ενέργεια του στερεού s είναι:

$$K_s = K_\rho + K_\delta = 16{,}25mR^2\omega^2$$

Και ο λόγος:

$$\frac{K_\delta}{K_s} = \frac{8{,}25mR^2\omega^2}{16{,}25mR^2\omega^2} = \frac{33}{65}$$

Σωστό το γ).

2) Στην προηγούμενη διάταξη, αντί να έχουμε καρφώσει τη ράβδο στο δίσκο, έχουμε άρθρωση, με αποτέλεσμα ο δίσκος να έχει τη δυνατότητα περιστροφής γύρω από το κέντρο του Κ. Επαναλαμβάνουμε το πείραμα. Στη θέση που η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου είναι ω:

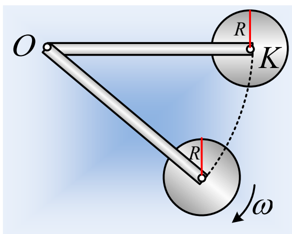
i) Η κινητική ενέργεια του δίσκου δίνεται από την εξίσωση:

α) $K_\delta = ½\, m\upsilon_K^2$, β) $K_\delta = ½\, m\upsilon_K^2 + ½\, I_{2cm}\cdot\omega^2$, γ) $K_\delta = ½\, I_{2,O}\cdot\omega^2$.

ii)Ο λόγος της κινητικής ενέργειας του δίσκου, προς την κινητική ενέργεια της ράβδου $\left(\frac{K_\delta}{K_\rho}\right)$, είναι ίσος με:

α) ½, β) 1, γ) 2

Απάντηση:



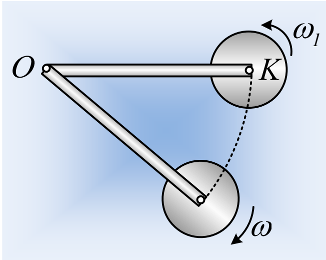
i) Τώρα ο δίσκος δεν πρόκειται να περιστραφεί, αφού δεν δέχεται κάποια ροπή που να τον περιστρέψει, οπότε εκτελεί μεταφορική κίνηση με ταχύτητα $\upsilon_\delta = \upsilon_K = \upsilon_{cm} = \omega\,\ell = 4\omega R$.

Συνεπώς η κινητική του ενέργεια παρέχεται από την εξίσωση $K_\delta = ½\, m\upsilon_K^2$ και σωστό είναι το α).

ii) Έχουμε $K_\delta = \frac{1}{2}m\upsilon_{cm}^2 = \frac{1}{2}m\cdot(4\omega R)^2 = 8mR^2\omega^2$, ενώ η ράβδος θα έχει την ίδια με προηγουμένως κινητική ενέργεια $K_\rho = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = 8mR^2\omega^2$.

Συνεπώς ο λόγος των δύο κινητικών ενεργειών είναι 1 και σωστό το β).

3) Έχοντας το σύστημα ράβδος- δίσκος αρθρωμένο όπως και προηγουμένως, φέρνουμε σε οριζόντια θέση τη ράβδο, θέτουμε σε περιστροφή το δίσκο, όπως στο σχήμα με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_1=2ω και στη συνέχεια το αφήνουμε να κινηθεί. Στη θέση που η ράβδος αποκτά γωνιακή ταχύτητα ω, η κινητική ενέργεια του δίσκου έχει τιμή:



α) $K_\delta = 8{,}25mR^2\omega^2$ β) $K_\delta = 9mR^2\omega^2$ γ) $K_\delta = 9{,}25mR^2\omega^2$

Απάντηση:

Ο δίσκος θα εκτελεί σύνθετη κίνηση με ταχύτητα κέντρου μάζας $\upsilon_{cm}=\upsilon_K=\omega\cdot\ell$, ενώ θα περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1, χωρίς αυτή να έχει μεταβληθεί, αφού οι δυνάμεις που δέχεται (δύναμη από τον άξονα και βάρος) έχουν μηδενικές ροπές ως προς τον άξονά του. Αλλά τότε:

$$K_\delta = \frac{1}{2} m\upsilon_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\omega_1^2 = \frac{1}{2} m\cdot(\omega\ell)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} m\cdot R^2(2\omega)^2 \rightarrow$$

$$K_\delta = \frac{1}{2} m\cdot 16R^2\omega^2 + \frac{1}{4} m\cdot R^2\cdot 4\omega^2 = 9mR^2\omega^2$$

Σωστό το β).

Υλικό Φυσικής-Χημείας
Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης