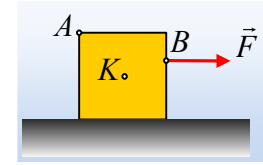


### Μια «όρθια» τετράγωνη πλάκα σε οριζόντιο επίπεδο.

Μια επίπεδη τετράγωνη ομογενής πλάκα ακμής  $a=0,4\text{m}$  και βάρους  $w=200\text{N}$  ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζει συντελεστές τριβής  $\mu=\mu_s=0,4$ . Σε μια στιγμή δέχεται οριζόντια δύναμη  $F$ , όπως στο σχήμα, ασκούμενη σε σημείο  $B$ , το οποίο απέχει κατά  $h=0,3\text{m}$  από το επίπεδο.



A) Αν  $F=50\text{N}$ , τότε:

- i) Η τριβή που ασκείται στον κύβο έχει μέτρο  $T=\mu \cdot w=80\text{N}$ .
- ii) Η ροπή του βάρους ως προς την κορυφή  $A$  είναι οριζόντια με φορά προς τα μέσα στο σχήμα.
- iii) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το κέντρο  $K$  της πλάκας είναι μηδενική.
- iv) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς την κορυφή  $A$  της πλάκας, είναι μηδενική.
- v) Η ροπή της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου, ως προς το κέντρο  $K$  της πλάκας είναι μηδενική.

B) Αν η πλάκα σύρεται με σταθερή ταχύτητα  $v=1\text{m/s}$ , με την επίδραση της δύναμης  $F$  τότε:

- i) Το μέτρο της δύναμης  $F$ , είναι ίσο με  $80\text{N}$ .
- ii) Η ροπή της δύναμης  $F$  ως προς το κέντρο  $K$  της πλάκας είναι οριζόντια με μέτρο  $\tau_F=8\text{N}\cdot\text{m}$ .
- iii) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το κέντρο  $K$  της πλάκας είναι μηδενική.
- iv) Η ροπή της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου, ως προς την κορυφή  $A$  έχει μέτρο  $\tau_N= \frac{1}{2} w \cdot a$ .
- v) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς την κορυφή  $A$  της πλάκας, είναι μηδενική.

Γ) Στην αρχικά ακίνητη πλάκα ασκούμε τη δύναμη  $F$  με μέτρο  $F=100\text{N}$ , τότε:

- i) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το κέντρο  $K$  της πλάκας είναι μηδενική.
- ii) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς την κορυφή  $A$  της πλάκας, είναι μηδενική.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

#### Απάντηση:

A) Η μέγιστη τιμή της τριβής η οποία μπορεί να ασκηθεί στο σώμα, η οριακή τριβή, έχει μέτρο  $T_{op}=T_{ok}=\mu_s \cdot N = \mu_s \cdot w=80\text{N}$ . Από τη στιγμή που η δύναμη  $F$  έχει μικρότερο μέτρο ( $F=50\text{N}$ ), η τριβή θα είναι στατική και το σώμα δεν θα κινηθεί (μεταφορικά). Αλλά τότε από την ισορροπία της πλάκας παίρνουμε:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow F-T_s=0 \rightarrow T_s=F=50\text{N}, \quad \Sigma F_y=0 \rightarrow N-w=0 \rightarrow N=w=200\text{N}.$$

Τι πρόκειται να κάνει η πλάκα όσον αφορά την περιστροφή της; Μήπως ανατρέπεται; Για να ανατραπεί, θα πρέπει η κάθετη αντίδραση του επιπέδου να ασκηθεί στην κορυφή  $\Gamma$ , οπότε ουσιαστικά η πλάκα έρχεται σε επαφή με ένα σημείο με το έδαφος και οριακά είναι «έτοιμη» να επιτραπεί. Έστω λοιπόν ότι δεν ανατρέπεται. Σε ποιο σημείο της βάσης περνά η  $N$ ;

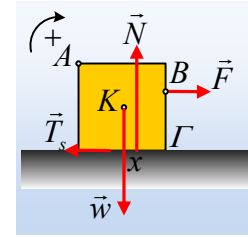
$$\Sigma \tau_K = 0 \rightarrow \tau_w + \tau_N + \tau_F + \tau_{T_s} = 0$$

Και παίρνοντας τις δεξιόστροφες ροπές ως θετικές, έχουμε:

$$w \cdot 0 + \tau_N \cdot F \cdot y - T_s \cdot \frac{1}{2} a = 0 \rightarrow \tau_N = F \cdot y + \frac{1}{2} T_s \cdot a = 50N \cdot 0,1N \cdot m + \frac{1}{2} 50N \cdot 0,4N \cdot m = 15N \cdot m.$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα μας λέει ότι η κάθετη αντίδραση του επιπέδου (η δύναμη στήριξης) δεν περνάει από το κέντρο Κ της πλάκας, αλλά ο φορέας της απέχει κατά  $x$  από το Κ, όπου:

$$\tau_N = N \cdot x \rightarrow x = \frac{\tau_N}{N} = \frac{15}{200} m = 0,075 m$$

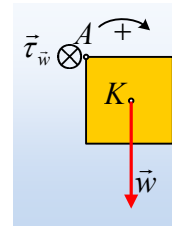


όπως στο διπλανό σχήμα, οπότε αφού  $x < a/2$  η πλάκα δεν ανατρέπεται.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, έχουμε:

- i) Η τριβή που ασκείται στον κύβο έχει μέτρο  $T = \mu \cdot w = 80N$ . (Λ)
- ii) Η ροπή του βάρους ως προς την κορυφή Α είναι οριζόντια με φορά προς τα μέσα στο σχήμα. (Σ)

Αφού η ροπή είναι κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν το σημείο Α και ο φορέας τους βάρους, το οποίο είναι το κατακόρυφο επίπεδο, το επίπεδο της πλάκας. Εξάλλου η ροπή αυτή, με βάση τη σύμβαση που πήραμε είναι θετική, δηλαδή έχει φορά προς το μέσα μέρος της σελίδας.



- iii) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι μηδενική. (Σ)
- iv) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς την κορυφή Α της πλάκας, είναι μηδενική. (Σ)

Από τη στιγμή που η πλάκα ισορροπεί, το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται πάνω της είναι ίσο με μηδέν, ως προς οποιοδήποτε σημείο.

- v) Η ροπή της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου, ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι μηδενική. (Λ).

Η δικαιολόγηση παραπάνω.

B) Σχεδιάζουμε ξανά τις δυνάμεις, όπως στο διπλανό σχήμα.

- i) Το μέτρο της δύναμης F, είναι ίσο με 80N. (Σ)

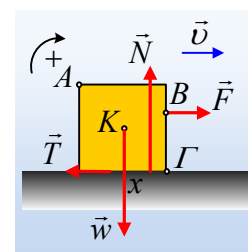
Η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας, συνεπώς και πάλι  $\Sigma F = 0$ , ή  $\Sigma F_x = 0 \rightarrow F = T_{ολ} = 80N$ .

- ii) Η ροπή της δύναμης F ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι οριζόντια με μέτρο  $\tau_F = 8N \cdot m$ . (Σ)

Η ροπή είναι οριζόντια με μέτρο  $\tau_F = F \cdot y = 80N \cdot 0,1m = 8N \cdot m$ , όπου  $y$  η απόσταση του Κ από τον φορέα της δύναμης, δηλαδή  $y = h - \frac{1}{2} a = 0,1m$ .

- iii) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι μηδενική. (Σ)

Αν υπήρχε ροπή ως προς το Κ, η πλάκα θα άρχιζε να περιστρέφεται, αποκτώντας γωνιακή επιτάχυνση. Μήπως όμως αυτό πράγματι συμβαίνει; Ας υπολογίσουμε ξανά την απόσταση  $x$  του φορέα της N, από το κέντρο Κ:



$$\Sigma \tau_K = 0 \rightarrow \tau_w + \tau_N + \tau_F + \tau_{T_S} = 0$$

$$0 - N \cdot x + F \cdot y + T \cdot \frac{1}{2} \alpha = 0 \rightarrow x = \frac{2F \cdot y + T \cdot \alpha}{2N} = \frac{2 \cdot 80 \cdot 0,1 + 80 \cdot 0,4}{2 \cdot 200} m = 0,12 m$$

Δηλαδή ο φορέας της Ν περνάει από τη βάση στήριξης απέχοντας 0,12m από το μέσον της. Η πλάκα κινδύνευε να ανατραπεί, συνεπώς να αρχίσει να περιστρέφεται, όταν ο φορέας της Ν φτάσει στην κορυφή Γ, πράγμα που σημαίνει, ότι η πλάκα έρχεται σε επαφή με το επίπεδο, μόνο με ένα!!! της σημείο.

iv) Η ροπή της κάθετης αντίδρασης του επιπέδου, ως προς την κορυφή Α έχει μέτρο  $\tau_N = \frac{1}{2} w \cdot \alpha$ . (Λ)

Για την ροπή της Ν ως προς το Α έχουμε:

$$\tau_A = -N \cdot (\frac{1}{2} \alpha + x) = -200 \cdot (0,2 + 0,12) N \cdot m = -64 N \cdot m.$$

v) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς την κορυφή Α της πλάκας, είναι μηδενική.

Ας το υπολογίσουμε:

$$\Sigma \tau_A = w \cdot \frac{1}{2} \alpha - N \cdot (\frac{1}{2} \alpha + x) - F \cdot (\frac{1}{2} \alpha - y) + T \cdot \alpha \rightarrow$$

$$\Sigma \tau_A = 200 \cdot 0,2 N \cdot m - 200 \cdot (0,2 + 0,12) N \cdot m - 80 \cdot 0,1 N \cdot m + 80 \cdot 0,4 N \cdot m = 0 \quad (\Sigma)$$

### Σχόλιο:

Το ότι η πλάκα κινείται με σταθερή ταχύτητα κέντρου μάζας σημαίνει ότι ισορροπεί, συνεπώς η κατάσταση, όσον αφορά δυνάμεις και ροπές δεν αλλάζει, σε σχέση με το να παρέμενε ακίνητη. Έτσι το συμπέρασμα της ερώτησης Α iv) ισχύει και εδώ.

Γ) Όταν η δύναμη πάρει τιμή μεγαλύτερη από την οριακή τριβή ( $F > 80N$ ) η πλάκα θα επιταχυνθεί προς τα δεξιά και δεν θα ισορροπεί πια.

i) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς το κέντρο Κ της πλάκας είναι μηδενική.

Αυτό εξαρτάται από το αν η πλάκα ανατρέπεται (αν τεθεί και σε

περιστροφή) ή όχι. Ας υποθέσουμε ότι η πλάκα ανατρέπεται, στρεφόμενη γύρω από το Γ με θετική φορά (όπως δεχτήκαμε παραπάνω, δεξιόστροφα). Στην περίπτωση αυτή η κάθετη αντίδραση περνά από την κορυφή Γ και έχουμε:

$$\Sigma \tau_K = \tau_w + \tau_N + \tau_F + \tau_{T_S} = 0 - N \cdot \frac{1}{2} \alpha + F \cdot y + T \cdot \frac{1}{2} \alpha \rightarrow$$

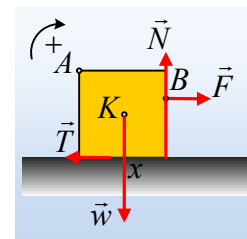
$$\Sigma \tau_K = -200 \cdot 0,2 N \cdot m + 100 \cdot 0,1 N \cdot m + 80 \cdot 0,2 N \cdot m = -14 N \cdot m. \quad \text{Άτοπο!}$$

Συνεπώς η υπόθεσή μας ότι ανατρέπεται η πλάκα δεν ήταν σωστή. Η πλάκα εκτελεί μόνο μεταφορική επιταχυνόμενη κίνηση, οπότε  $\Sigma \tau_K = 0$ . (Σ)

ii) Η συνολική ροπή των δυνάμεων ως προς την κορυφή Α της πλάκας, είναι μηδενική.

Ερχόμαστε ξανά στην συνθήκη  $\Sigma \tau_K = 0 \rightarrow$

$$\tau_w + \tau_N + \tau_F + \tau_{T_S} = 0 \rightarrow 0 - N \cdot x' + F \cdot y + T \cdot \frac{1}{2} \alpha \rightarrow$$



$$x' = \frac{2F \cdot y + T \cdot a}{2N} = \frac{2 \cdot 100 \cdot 0,1 + 80 \cdot 0,4}{2 \cdot 200} m = 0,13m$$

Οπότε ως προς την κορυφή Α έχουμε:

$$\Sigma \tau_A = w \cdot \frac{1}{2} a - N \cdot (\frac{1}{2} a + x') - F \cdot (\frac{1}{2} a - y) + T \cdot a \rightarrow$$

$$\Sigma \tau_A = 200 \cdot 0,2 N \cdot m - 200 \cdot (0,2 + 0,13) N \cdot m - 100 \cdot 0,1 N \cdot m + 80 \cdot 0,4 N \cdot m = -4 N \cdot m \quad (\Delta)$$

### Συμπέρασμα:

Όταν ένα στερεό εκτελεί μόνο μεταφορική επιταχυνόμενη κίνηση, χωρίς να περιστρέφεται, το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών, όλων των δυνάμεων που δέχεται, είναι ίσο με το μηδέν **ΜΟΝΟ** ως προς το κέντρο μάζας και όχι ως προς οποιοδήποτε σημείο.

### Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

*Διονύσης Μάργαρης*