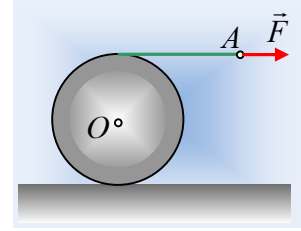


Μια κύλιση με μεταβλητή επιτάχυνση.

Γύρω από έναν τροχό, μάζας $m=20\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,6\text{m}$, ο οποίος βρίσκεται ακίνητος σε οριζόντιο επίπεδο, έχουμε τυλίξει ένα αβαρές νήμα. Σε μια στιγμή $t_0=0$, ασκούμε στο άκρο του νήματος A, μια οριζόντια δύναμη F το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται με το χρόνο, σύμφωνα με την εξίσωση $F=0,9t$ (μονάδες στο S.I.). Ο τροχός αρχίζει να κυλιέται και τη στιγμή $t'=10\text{s}$ σταματάμε να τραβάμε το νήμα και να ασκούμε δύναμη.

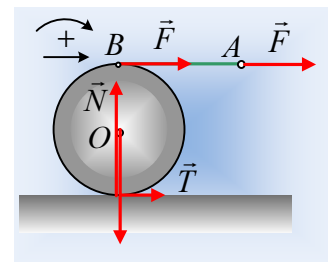


- i) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του κέντρου O του τροχού σε συνάρτηση με το χρόνο και να κάνετε τη γραφική της παράσταση, μέχρι τη χρονική στιγμή $t_2=12\text{s}$.
- ii) Να υπολογιστεί η στροφορμή του τροχού κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής του τροχού ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του O, τις χρονικές στιγμές:
 - α) $t_1=5\text{s}$ και β) $t_2=12\text{s}$.
- iii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής του τροχού ο οποίος διέρχεται από το κέντρο του O, τις παραπάνω χρονικές στιγμές.
- iv) Πόση ενέργεια μεταφέρθηκε στον τροχό μέσω της ασκούμενης δύναμης F και ποια η ισχύς της δύναμης τη στιγμή t_1 ;

Δίνεται η ροπή αδράνειας ως προς κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο του $I= \frac{1}{2} mR^2$.

Απάντηση:

Ο τροχός κυλιέται, χωρίς να αναφέρεται αν το επίπεδο είναι ή όχι λείο. Έστω λοιπόν ότι είναι λείο, με αποτέλεσμα τόσο η επιτάχυνση του κέντρου μάζας όσο και η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού να οφείλεται στη δράση της δύναμης F , η οποία μεταφέρεται μέσω του νήματος και ασκείται στον τροχό στο σημείο B.



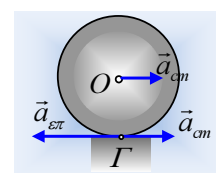
Θεωρούμε την κύλιση σαν σύνθετη κίνηση, μια μεταφορική με

επιτάχυνση a_{cm} και μια στροφική γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο O του τροχού. Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση, καθώς και την ωρολογιακή φορά περιστροφής ως θετικές, έχουμε:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_{cm} \rightarrow F = m \cdot a_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{γων} \rightarrow F \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \alpha_{γων} \rightarrow F = \frac{1}{2} m (R \alpha_{γων}) \quad (2)$$

Προφανώς δεν μπορούν να ισχύουν ταυτόχρονα οι (1) και (2), αφού αν εστιάσουμε στο σημείο επαφής Γ του τροχού με το έδαφος, έχει μια επιτάχυνση λόγω μεταφορικής κίνησης a_{cm} και μια επιτρόχια επιτάχυνση



$a_{επ} = a_{γων}R = 2F/m = 2 a_{cm}$, συνεπώς το σημείο Γ έχει επιτάχυνση προς τα αριστερά και ο τροχός θα σπινάρει. Για να μην συμβεί αυτό πρέπει να μειωθεί η γωνιακή επιτάχυνση και αυτό θα συμβεί αν ασκηθεί στον τροχό μια αντιωρολογιακής φοράς ροπή, η οποία να έχει αντίθετη φορά από τη ροπή της F. Αυτό γίνεται αν η τριβή έχει φορά προς τα δεξιά, όπως στο παραπάνω σχήμα.

- i) Ερχόμενοι ξανά στους νόμους του Νεύτωνα και λαμβάνοντας υπόψη την ασκούμενη τριβή, οι εξισώσεις (1) και (2) γίνονται:

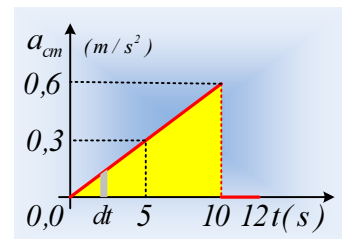
$$\Sigma F_x = m \cdot a_{cm} \rightarrow F + T = m \cdot a_{cm} \quad (1^a)$$

$$\Sigma \tau = I \cdot a_{γων} \rightarrow F \cdot R - TR = \frac{1}{2} m R^2 \cdot a_{γων} \rightarrow F - T = \frac{1}{2} m (R a_{γων}) \quad (2^a)$$

Αλλά λόγω κύλισης $a_{cm} = a_{γων}R$ και με πρόσθεση των (1^α) και (2^α) παίρνουμε:

$$2F = \frac{3}{2} m a_{cm} \rightarrow a_{cm} = \frac{4F}{3m} = \frac{4 \cdot 0,9t}{3 \cdot 20} = 0,06t \quad (\text{S.I.}) \text{ με } 0 \leq t \leq 10\text{s}.$$

Μόλις σταματήσει να ασκείται η δύναμη F ($t > 10\text{s}$), παύει να ασκείται και τριβή και ο τροχός κυλιέται πια με σταθερή γωνιακή ταχύτητα. Έτσι η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης, έχει τη μορφή του διπλανού σχήματος.



- ii) Από τον ορισμό της επιτάχυνσης έχουμε ότι:

$$a_{cm} = \frac{dv_{cm}}{dt} \rightarrow dv_{cm} = a_{cm} \cdot dt \rightarrow$$

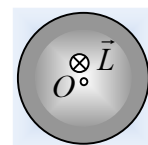
Αν πάρουμε δηλαδή μια απειροελάχιστη μεταβολή του χρόνου dt τότε το γινόμενο $a_{cm} \cdot dt$, ίσο με το εμβαδόν του γκρι χωρίου στο παραπάνω σχήμα, είναι ίσο με τη μεταβολή της ταχύτητας, στο παραπάνω χρονικό διάστημα. Αλλά τότε στο διάστημα από 0-5s η μεταβολή της ταχύτητας είναι ίση με το εμβαδόν του αντίστοιχου τριγώνου, δηλαδή:

$$\Delta v = v_1 - 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0,3 \text{ m/s} \rightarrow v_1 = 0,75 \text{ m/s}$$

Οπότε η στροφορμή του τροχού τη στιγμή t_1 κατά (ως προς) τον άξονα περιστροφής του είναι οριζόντια με φορά προς τα μέσα (κάθετη στο επίπεδο του σχήματος) με μέτρο:

$$L_1 = I\omega_1 = \frac{1}{2} m R^2 \omega_1 = \frac{1}{2} m R v_1 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0,6 \cdot 0,75 \text{ kgm}^2 / \text{s} = 4,5 \text{ kgm}^2 / \text{s}.$$

Με την ίδια λογική η ταχύτητα τη στιγμή $t_2 = 12\text{s}$, ίση με την ταχύτητα τη στιγμή $t' = 10\text{s}$, αριθμητικά ίση με το εμβαδόν του κίτρινου τριγώνου έχει μέτρο:



$$v_2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,6 \text{ m/s} \rightarrow v_2 = 3 \text{ m/s}$$

Και η αντίστοιχη στροφορμή, με την ίδια κατεύθυνση και μέτρο:

$$L_2 = I\omega_2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega_2 = \frac{1}{2} m R v_2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 0,6 \cdot 3 \text{ kgm}^2 / \text{s} = 18 \text{ kgm}^2 / \text{s}.$$

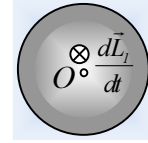
iii) Από την εξίσωση (1^α) παίρνουμε:

$$F+T=m \cdot a_{cm} \rightarrow T=ma_{cm}-F=20 \cdot 0,06t-0,9t=0,3t \text{ (S.I.)}$$

Αλλά τότε τη στιγμή $t_1=5s$ έχουμε:

$$\frac{dL_l}{dt} = \Sigma \tau = F \cdot R - T \cdot R = (F - T)R = (0,9t - 0,3t)R = 0,6t \cdot R \rightarrow$$

$$\frac{dL_l}{dt} = 0,6t \cdot R = 0,6 \cdot 5 \cdot 0,6 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2 = 1,8 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2.$$



Με διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα μέσα.

Εξάλλου μετά τη στιγμή $t'=10s$ που μηδενίζεται η δύναμη, μηδενίζεται και η τριβή, οπότε δεν ασκείται κάποια ροπή στον τροχό και ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του είναι μηδενικός.

iv) Εφαρμόζουμε για τον τροχό το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργειας από 0-10s:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = W_w + W_N + W_T + W_F$$

Όμως $K_{\text{αρχ}}=0$, όπως και $W_w = W_N = 0$ αφού οι δυνάμεις είναι κάθετες στη μετατόπιση, ενώ $W_T = 0$ αφού πρόκειται για **στατική τριβή**, η οποία ασκείται σε σημείο του τροχού με μηδενική ταχύτητα ή αν προτιμάτε δεν μετακινείται το σημείο εφαρμογής της, οπότε:

$$\frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I \omega_2^2 = W_F \rightarrow$$

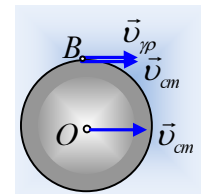
Όπου $v_{cm} = \omega_2 R$ και με αντικατάσταση:

$$W_F = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \omega_2^2 = \frac{3}{4} m v_2^2 = \frac{3}{4} 20 \cdot 3^2 \text{ J} = 135 \text{ J}$$

Για να βρούμε την ισχύ της δύναμης τη στιγμή t_1 , βρίσκουμε την ταχύτητα του σημείου B, σημείου που ασκείται η δύναμη F στον τροχό.

Το σημείο αυτό έχει λόγω μεταφορικής κίνησης ταχύτητα $v_{cm}=0,75\text{m/s}$ και λόγω στροφικής κίνησης, μια γραμμική ταχύτητα $v_{\gamma\rho}=\omega_1 R$. Συνεπώς $v_B=2v_{cm}=1,5\text{m/s}$. Οπότε η ισχύς της δύναμης, η οποία τη στιγμή αυτή έχει μέτρο $F_1=0,9 \cdot 5\text{N}=4,5\text{N}$, είναι ίση:

$$P_F = F_1 \cdot v_B = 4,5 \cdot 1,5 \text{ W} = 6,75 \text{ W}$$



Σχόλια:

1) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού τη στιγμή t_1 θα μπορούσε να βρεθεί ως εξής:

$$\frac{dL_l}{dt} = \frac{d(I\omega)}{dt} = I \cdot a_{\gamma\omega v} = \frac{1}{2} m R^2 \cdot a_{\gamma\omega v} = \frac{1}{2} m R \cdot a_{cm} = 1,8 \text{ kgm}^2 / \text{s}^2.$$

2) Θα μπορούσαμε εξάλλου να υπολογίσουμε την ισχύ της δύναμης την ίδια στιγμή, παίρνοντας τις επιμέρους τιμές της για μεταφορική και περιστροφική κίνηση. Έτσι θα είχαμε:

$$P_F = F_l \cdot v_{cm} + \tau_F \cdot \omega = F_l \cdot \omega_l R + F_l R \cdot \omega_l = 2F_l R \cdot \omega_l = 6,75W$$

3) Με την ίδια λογική, κάθε στιγμή, η ισχύς της τριβής είναι ίση:

$$P_T = T \cdot v_{cm} - \tau_T \cdot \omega = T \cdot \omega R - TR \cdot \omega = 0$$

Συνεπώς εξαιτίας της **στατικής** τριβής, ούτε δίνεται ούτε αφαιρείται ενέργεια στον τροχό, λέγοντας ότι το έργο της στατικής τριβής είναι μηδενικό. Θα μπορούσαμε απλά να δούμε την στατική τριβή, σαν ένα «μετατροπέα» ο οποίος αφαιρεί περιστροφική κινητική ενέργεια, μετατρέποντάς την σε μεταφορική.

Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης