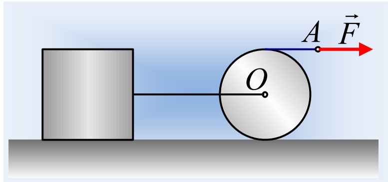
Ο κύλινδρος μεταφέρει τον κύβο;



Ένας κύλινδρος, μάζας m=20kg και ακτίνας R=0,2m και ένας κύβος, μάζας M=50kg ηρεμούν σε οριζόντιο επίπεδο με το οποίο παρουσιάζουν συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=0{,}4$. Ένα αβαρές τεντωμένο οριζόντιο νήμα συνδέει το κέντρο του κυλίνδρου με τον κύβο, ενώ γύρω από τον κύλινδρο έχουμε τυλίξει ένα άλλο αβαρές νήμα, στο άκρο Α του οποίου ασκούμε κάποια στιγμή μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου F.

i) Ποια είναι η μέγιστη τιμή της δύναμης F που μπορούμε να ασκήσουμε, χωρίς να κινηθούν τα σώματα;

ii) Αν τη στιγμή $t_0=0$ τραβήξουμε το άκρο του νήματος ασκώντας δύναμη $F_1=90N$, να υπολογιστούν τη στιγμή $t_1=2s$:

α) Η ταχύτητα του άκρου Α.

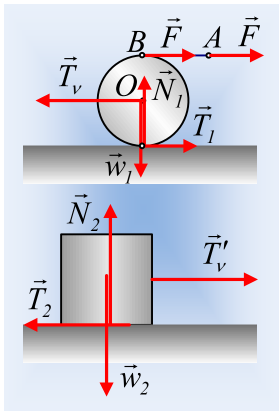
β) Η ισχύς της δύναμης.

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας κάθε σώματος.

iii) Ποιες θα ήταν οι αντίστοιχες απαντήσεις στα προηγούμενα υποερωτήματα, αν η ασκούμενη δύναμη F είχε μέτρο $F_2=155N$;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου $I=\frac{1}{2}mR^2$ και $g=10m/s^2$.

Απάντηση:



Μόλις ασκήσουμε τη δύναμη F στο άκρο Α του νήματος, μέσω αυτού μεταφέρεται στον κύλινδρο ίση δύναμη ασκούμενη στο σημείο επαφής Β του νήματος με τον κύλινδρο. Για να μην τεθεί σε περιστροφή ο κύλινδρος, θα πρέπει $\Sigma\tau_o=0$, οπότε θα εμφανιστεί στατική τριβή με φορά προς τα δεξιά, όπως στο σχήμα.

i) Για τον κύλινδρο: $\Sigma\tau_o=0 \rightarrow F\cdot R-T_1R=0 \rightarrow T_1=F$.

Αλλά η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής που μπορεί να ασκηθεί χωρίς να αρχίσει η περιστροφή του που κυλίνδρου, η οριακή τριβή, έχει μέτρο $T_{1op}=\mu_s\cdot N_1=\mu_s\cdot mg=0{,}4\cdot 20\cdot 10N=80N$, αλλά τότε και η μέγιστη δύναμη F που μπορούμε να ασκήσουμε χωρίς να αρχίσει να επιταχύνεται περιστροφικά, είναι $F_{max}=80N$.

Βέβαια έτσι εξασφαλίζουμε τη μη περιστροφή του κυλίνδρου. Και η μεταφορική του κίνηση; Για να μην επιταχυνθεί λοιπόν μεταφορικά, θα πρέπει επίσης να ισχύει και $\Sigma F_x=0$ ή

$$T_\nu=F+T_1=160N.$$

Ερχόμαστε τώρα στον κύβο. Στο δεύτερο σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύβο. Για να ισορροπεί πρέπει $\Sigma F_{2x}=0$ δηλαδή πρέπει να ασκηθεί πάνω του στατική τριβή μέτρου ίσου την τάση του νήματος T_v=160N. Αλλά η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής που μπορεί να εμφανιστεί είναι $T_{2ορ}=μ_sMg=0,4·50·10N=200N$, συνεπώς όταν δεχτεί την τάση μέτρου 160N, θα εμφανιστεί στατική τριβή, μέτρου επίσης 160N και δεν θα ολισθήσει.

Συμπέρασμα: Αν τραβήξουμε το νήμα με δύναμη μέτρου έως και 80N, θα αναπτυχθούν δυνάμεις στατικής τριβής και στα δυο σώματα, οπότε δεν θα υπάρξει κίνηση (ούτε μεταφορά, ούτε περιστροφή του κυλίνδρου).

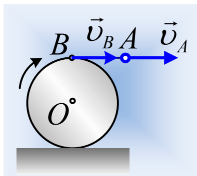
ii) Προφανώς τώρα αφού F_1>80N ο κύλινδρος θα επιταχυνθεί στροφικά, μιας και δεν μπορεί να ασκηθεί πάνω του στατική τριβή 90N. Η τριβή θα γίνει τριβή ολίσθησης, μέτρου $T_{1ολ}=μmg=80N$. Αλλά τότε για τη μεταφορική του κίνηση, αν δεχτούμε ότι $ΣF_x=0$, θα έχουμε ότι $T_v=F_1+T_{1ολ}=170N$, μικρότερη ξανά από την οριακή τριβή που μπορεί να αναπτυχθεί στον κύβο, ο οποίος θα συνεχίσει να ισορροπεί. Αλλά τότε ο κύβος δεν θα κινηθεί, το νήμα θα μείνει τεντωμένο, χωρίς να μπορεί να επιταχυνθεί μεταφορικά ούτε ο κύλινδρος, ο οποίος θα αρχίσει να περιστρέφεται. Για την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου:

$$Στ=I·α_{γων} \to FR - T_{1ολ}R = \frac{1}{2}mR^2 a_{γων1} \to$$

$$a_{γων1} = \frac{2(F - T_{1λ})}{mR}\frac{2(90-80)}{20\cdot 0,2} rad/s^2 = 5rad/s^2.$$

Αλλά τότε η κίνηση είναι στροφική ομαλά επιταχυνόμενη και κατ' αντιστοιχία με την ευθύγραμμη, τη στιγμή t_1 έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega = a_{γων1}t = 5\cdot 2rad/s = 10rad/s$$



α) το σημείο Α του νήματος, έχει ταχύτητα, όση και το σημείο Β, το οποίο εκτελεί κυκλική κίνηση γύρω από το Ο, οπότε:

$$\upsilon_A=\upsilon_B=\omega R=10·0,2m/s=2m/s.$$

β) Η ισχύς της δύναμης είναι ίση:

$$P=F_1 ·\upsilon_A=90·2W=180W.$$

γ) Από το Θ.Μ.Κ.Ε. για τον κύλινδρο έχουμε ότι $ΔK=W_{ολ}$ ή $ΔK=W_{w1}+W_{N1}+W_{F1}+W_{T1}$, όπου: $W_{w1}=W_{N1}=0$, δυνάμεις κάθετες στη μετατόπιση, ενώ $W_{T1}=-T_1Δx=-\tau_{T_1}\cdot Δ\vartheta$, οπότε:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{F1}}{dt} + \frac{dW_{T1}}{dt} = P_F - \frac{\tau\cdot d\theta}{dt} = P_F - T_1R\cdot\omega \to$$

$$\frac{dK}{dt} = 180J/s - 80\cdot 0,2\cdot 10J/s = 20J/s$$

Εξάλλου ο κύβος παραμένει ακίνητος, οπότε προφανώς $dK_κ/dt = 0.$

iii) Αν το μέτρο της ασκούμενης δύναμης ήταν F_2=155N και η τριβή T_1 ήταν ξανά 80N, τότε για να ισορροπεί μεταφορικά ο κύλινδρος η τάση του νήματος θα πρέπει να ήταν

155N+80N=235N. Αλλά αν ασκηθεί δύναμη 235N στον κύβο, αυτός θα ολισθήσει, συνεπώς δεν έχουμε (μεταφορικά) ισορροπία , όπως στο προηγούμενο ερώτημα, αφού έχουμε μεταφορική κίνηση του συστήματος. Εφαρμόζουμε λοιπόν για κάθε σώμα το 2ο νόμο του Νεύτωνα:

Μεταφορική κίνηση κυλίνδρου: $\Sigma F_x = m\cdot\alpha \rightarrow F_2 + T_1 - T_v = m\cdot\alpha$ (1)

Στροφική κίνηση: $\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu 2} \rightarrow F_2R - T_1R = \frac{1}{2}mR^2\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu 2}$ (2)

Κύβος Σ: $\Sigma F_x = M\cdot\alpha_\kappa \rightarrow T_v{'} - T_{2o\lambda} = M\cdot\alpha_\kappa$ (3)

Αλλά το νήμα που συνδέει τα δυο σώματα είναι αβαρές, οπότε $T_v = T_v{'}$, ενώ έχει και σταθερό μήκος, άρα $\alpha_\kappa = \alpha$, ενώ $T_{2o\lambda} = T_{2o\rho} = 200N$. **Θεωρώντας** τώρα ότι ο κύλινδρος κυλίεται θα έχουμε και ότι $\alpha = \alpha_{\gamma\omega\nu 2}R$ και με πρόσθεση κατά μέλη των τριών παραπάνω εξισώσεων παίρνουμε:

$$2F_2 - T_{2o\lambda} = \left(m + \frac{1}{2}m + M\right)a \rightarrow$$

$$a = \frac{2F_2 - T_{2o\lambda}}{\frac{3}{2}m + M} = \frac{2\cdot 155 - 200}{\frac{3}{2}20 + 50}m/s^2 = \frac{11}{8}m/s^2.$$

Είναι όμως σωστή η υπόθεσή μας ότι ο κύλινδρος κυλίεται; Βρίσκουμε την ασκούμενη στον κύλινδρο (στατική) τριβή από την (2):

$$T_1 = F_2 - \frac{1}{2}ma = 155N - \frac{1}{2}20\cdot\frac{11}{8}N = 141{,}25N!!!$$

Τέτοια δύναμη τριβής όμως δεν μπορεί να αναπτυχθεί, οπότε ο κύλινδρος δεν θα κυλίεται, αλλά θα ολισθαίνει περιστρεφόμενος. Αλλά τότε αντικαθιστώντας T_1=80N παίρνουμε με πρόσθεση των (1) και (3):

$$F_2 + T_{1o\lambda} - T_{2o\lambda} = (m + M)a \rightarrow a = \frac{F_2 + T_{1o\lambda} - T_{2o\lambda}}{m + M} \rightarrow$$

$$a = \frac{155 + 80 - 200}{20 + 50}m/s^2 = 0{,}5m/s^2$$

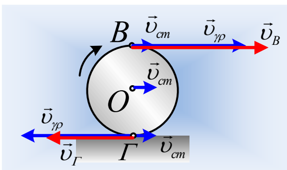
Οπότε από την (2) βρίσκουμε:

$$a_{\gamma\omega\nu 2} = \frac{2(F_2 - T_1)}{mR} = \frac{2\cdot(155 - 80)}{20\cdot 0{,}2}rad/s^2 = 37{,}5rad/s^2.$$

Έτσι τη στιγμή t_1=2s θα έχουμε:

$$\upsilon_1 = at_1 = 0{,}5\cdot 2m/s = 1m/s \quad \text{και } \omega = \alpha_{\gamma\omega\nu 2}\cdot t_1 = 37{,}5\cdot 2rad/s = 75m/s.$$

α) Η ταχύτητα του άκρου Α ίση με την ταχύτητα του σημείου, θα προκύψει ως το άθροισμα της ταχύτητας του κυλίνδρου λόγω μεταφορικής κίνησης $\upsilon_{cm}=\upsilon$=1m/s και της γραμμικής ταχύτητας του Β λόγω της κυκλικής κίνησης:



$$\upsilon_{\gamma\rho}=\omega R=75\cdot 0{,}2m/s=15m/s.$$

$$\upsilon_{A2}=\upsilon_B=\upsilon_{cm}+\upsilon_{\gamma\rho}=(1+15)m/s=16m/s$$

β) Η ισχύς της δύναμης είναι ίση:

$$P_2=F_2\cdot\upsilon_{A2}=155\cdot 16W=2480W.$$

γ) Δουλεύοντας όπως και στο αντίστοιχο υποερώτημα της ii) ερώτησης έχουμε:

Για τον κύλινδρο:

$$\frac{dK_1}{dt}=\frac{dW_{F2}}{dt}+\frac{dW_{T1}}{dt}+\frac{dW_{T\nu}}{dt}=P_{F_2}+P_{T_1}-T_\nu\upsilon_{cm}=F_2\upsilon_A-T_1\cdot\upsilon_\Gamma-T_\nu\upsilon_{cm}$$

Αλλά από την εξίσωση (3) $T_\nu{}'-T_{2o\lambda}=M\cdot\alpha_\kappa$ $\rightarrow$ $T_\nu=T_{2o\lambda}+M\cdot\alpha=200N+50\cdot 0{,}5N=225N$, ενώ $\upsilon_\Gamma=\upsilon_{\gamma\rho}-\upsilon_{cm}=14m/s$ (όπως στο παραπάνω σχήμα), οπότε:

$$\frac{dK_1}{dt}=F_2\upsilon_A-T_1\cdot\upsilon_\Gamma-T_\nu\cdot\upsilon_{cm}=155\cdot 16W-80\cdot 14W-225\cdot 1W=1.135J/s\ .$$

Για τον κύβο:

$$\frac{dK_2}{dt}=\frac{dW_{T'\nu}}{dt}+\frac{dW_{T2}}{dt}=(T_\nu'-T_2)\upsilon_\kappa=(225-200)\cdot 1J/s=25J/s$$

Σχόλιο.

Και αν θέλαμε να δούμε τι συμβαίνει με τις ενέργειες συνολικά;

Ας βρούμε την ισχύ κάθε τριβής.

$$P_{T_1}=-T_1\cdot\upsilon_\Gamma=-T_1\cdot\left(\upsilon_{\gamma\rho}-\upsilon_{cm}\right)=-80\cdot(15-1)W=-1.120W$$

$$P_{T_2}=-T_2\cdot\upsilon_\kappa=-T_2\cdot\upsilon_{cm}=-200\cdot 1W=-200W$$

Οι παραπάνω τιμές εκφράζουν την ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική εξαιτίας των δύο τριβών ολίσθησης. Αλλά τότε στο σύστημα δίνεται **ανά μονάδα χρόνου** (s) ενέργεια μέσω του έργου της δύναμης F_2 ίση με $P_2=2.480J$. Αυτή η ενέργεια είναι ίση με το άθροισμα της αύξησης της κινητικής ενέργεια των σωμάτων και της ενέργειας που μετατρέπεται σε θερμική.

Πράγματι:

$$P_2=\frac{dK_1}{dt}+\frac{dK_2}{dt}+P_Q=1.135J/s+25J/s+\left|-1120-200\right|J/s=2.480J/s\ .$$

dmargaris@gmail.com