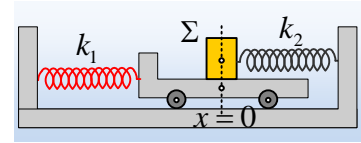


Αμαξίδιο και σώμα σε ταλαντώσεις.

Πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένα αμαξίδιο μάζας $M=3\text{kg}$, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k_1=120\text{N/m}$. Πάνω στο αμαξίδιο ηρεμεί ένα σώμα Σ μάζας $m=1\text{kg}$, δεμένο και αυτό στο άκρο δευτέρου οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k_2=130\text{N/m}$, όπως στο σχήμα, χωρίς να αναπτύσσονται δυνάμεις τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων. Θεωρούμε ότι τα κέντρα μάζας των δύο σωμάτων βρίσκονται στη θέση $x=0$. Τραβάμε αργά-αργά το αμαξίδιο προς τα αριστερά μετακινώντας το κατά $d=0,2\text{m}$ και τη στιγμή $t=0$, το αφήνουμε να κινηθεί.



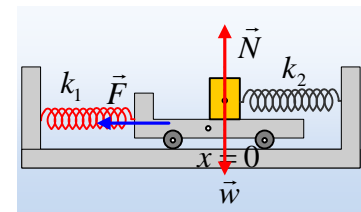
- i) Αν δεν υπάρχουν τριβές μεταξύ αμαξιδίου και σώματος Σ , θεωρώντας την προς τα αριστερά κατεύθυνση ως θετική να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις $x=x(t)$ της θέσης κάθε σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο, σε βαθμολογημένους άξονες.
- ii) Αν υπάρχουν τριβές μεταξύ σώματος και αμαξιδίου, με αποτέλεσμα να μην παρατηρείται ολίσθηση μεταξύ τους, να γίνει το διάγραμμα $x=x(t)$ της θέσης του συστήματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να υπολογιστεί ο ελάχιστος συντελεστής οριακής τριβής, μεταξύ των δύο σωμάτων για την παραπάνω κίνηση.

Δίνεται $\pi^2 \approx 10$ και ότι κατά τη διάρκεια των ταλαντώσεων, το αμαξίδιο δεν κτυπά στα τοιχώματα, αλλά και το σώμα Σ δεν θα φύγει από το αμαξίδιο, ούτε θα κτυπήσει κάπου.

Απάντηση:

Το σύστημα αρχικά ηρεμεί και η θέση ισορροπίας του $x=0$, ταυτίζεται με τη θέση που τα δυο ελατήρια έχουν τα φυσικά μήκη τους.

- i) Στη διάρκεια της μετακίνησης του αμαξιδίου προς τα αριστερά, με την άσκηση πάνω του κατάλληλης δύναμης \vec{F} , το σώμα Σ θα παραμείνει ακίνητο στη θέση του, αφού δεν δέχεται καμιά οριζόντια δύναμη, η οποία να το επιταχύνει. Συνεπώς μόλις το αμαξίδιο αφεθεί ελεύθερο, αυτό θα εκτελέσει ΑΑΤ (χωρίς να κινηθεί το σώμα Σ), γύρω από την θέση ισορροπίας του, η οποία ταυτίζεται με τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου σταθεράς k_1 , με εξίσωση απομάκρυνσης:



$$x_1 = A \cdot \eta \mu \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right)$$

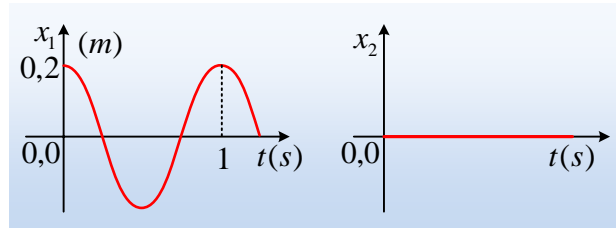
Η αρχική φάση τέθηκε $\pi/2$, αφού το αμαξίδιο ξεκινά από την ακραία θετική απομάκρυνσή του χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε και $A=d=0,2\text{m}$, ενώ:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1}{M}} = \sqrt{\frac{120}{3}} \text{rad/s} = 2\sqrt{10} \text{rad/s} = 2\pi \text{rad/s}$$

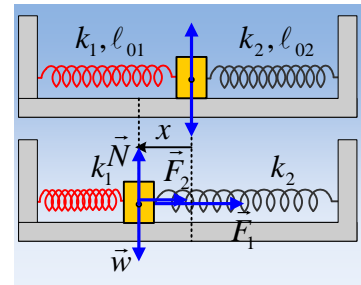
Και τελικά:

$$x_1 = 0,2 \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Με βάση αυτά η ζητούμενες γραφικές παραστάσεις είναι αυτές του παρακάτω σχήματος.



ii) Από τη στιγμή που δεν έχουμε ολίσθηση του σώματος Σ πάνω στο αμαξίδιο, η κατάσταση είναι αυτή που παριστάνεται στο διπλανό σχήμα, όπου έχουμε αντικαταστήσει το σύστημα των δύο σωμάτων με ένα άλλο σώμα Σ' μάζας 4kg. Έστω το σώμα σε μια τυχαία θέση, η οποία απέχει κατά x από τη θέση ισορροπίας. Τότε θεωρώντας ξανά την προς τ' αριστερά κατεύθυνση ως θετική, έχουμε:



$$\Sigma F_x = -F_1 - F_2 = -k_1 x - k_2 x = -(k_1 + k_2)x$$

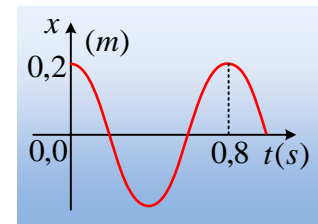
Συνεπώς το σύστημα των σωμάτων εκτελεί ΑΑΤ με $D = k_1 + k_2 = 120\text{N/m} + 130\text{N/m} = 250\text{N/m}$ έχοντας

$$\text{γωνιακή συχνότητα } \omega_1 = \sqrt{\frac{D}{M+m}} = \sqrt{\frac{250}{3+1}} \text{ rad/s} = \frac{5\pi}{2} \text{ rad/s}$$

Έτσι η εξίσωση της απομάκρυνσης θα είναι της μορφής:

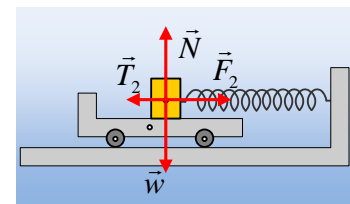
$$x = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2}t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Και η ζητούμενη γραφική παράσταση είναι αυτή του διπλανού σχήματος.



αφού τώρα η περίοδος είναι $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 0,8\text{s}$

Ας εστιάσουμε τώρα στο σώμα Σ και στις δυνάμεις που δέχεται, όπου T_2 η δύναμη στατικής τριβής, στην τυχαία απομάκρυνση x.



$$\Sigma F_x = ma \rightarrow$$

$$T_2 - F_2 = ma \rightarrow$$

$$T_2 = k_2 x + m(-\omega^2 x) \text{ ή}$$

$$T_2 = 130x - 1 \cdot \left(\frac{5\pi}{2}\right)^2 x = 130x - 125x = 5x$$

Βλέπουμε ότι η ασκούμενη τριβή είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και κατά συνέπεια παίρνει τη μέγιστη τιμή της (κατά μέτρο), σε μέγιστη τιμή απομάκρυνσης, $T_{\max} = 5 \cdot A = 1\text{N}$. Αλλά τότε για να μην υπάρξει ολίσθηση θα πρέπει αυτή η τιμή να είναι μικρότερη ή ίση της οριακής στατικής τριβής, με τον ελάχιστο συντελεστή:

$$T_{\max} \leq T_{\text{ορ}} \quad \text{ή} \quad T_{\max} \leq \mu_s N \rightarrow$$

$$\mu_s \geq \frac{T_{\max}}{N} \rightarrow \mu_s \geq \frac{T_{\max}}{w} \rightarrow$$

$$\mu_s \geq \frac{1N}{1 \cdot 10N} \quad \text{ή} \quad \mu_s \geq 0,1$$

Οπότε η ελάχιστη τιμή του συντελεστή οριακής τριβής είναι $\mu_{s/\min} = 0,1$

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους...

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης