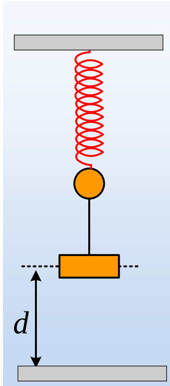
Αν κρεμάσουμε και μια πλάκα;



Μια μικρή σφαίρα μάζας m=0,5kg ηρεμεί στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, έχοντάς το επιμηκύνει κατά 10cm. Δένουμε τη σφαίρα με μια πλάκα, μάζας M=1,5kg, μέσω αβαρούς νήματος και την συγκρατούμε σε τέτοια θέση, ώστε το νήμα να είναι κατακόρυφο και τεντωμένο, χωρίς να προκαλείται μετακίνηση της σφαίρας. Στη θέση αυτή, η πλάκα απέχει κατά d=0,45m από το έδαφος, όπως στο διπλανό σχήμα.

Σε μια στιγμή αφήνουμε ελεύθερη την πλάκα, η οποία μετά από λίγο φτάνει στο έδαφος όπου και προσκολλάται, ενώ αμέσως κόβουμε και το νήμα. Να υπολογιστούν:

i) Η αρχική επιτάχυνση της σφαίρας, καθώς και η επιτάχυνσή της:

α) ελάχιστα πριν και

β) ελάχιστα μετά

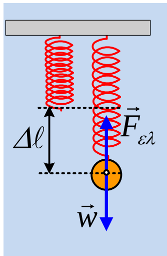
την κρούση της πλάκας.

ii) Η μέγιστη ταχύτητα της πλάκας.

iii) Η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική, κατά την κρούση της πλάκας με το έδαφος.

iv) Πόση είναι η ενέργεια ταλάντωσης της σφαίρας, μετά και την αφαίρεση του νήματος;

Απάντηση:



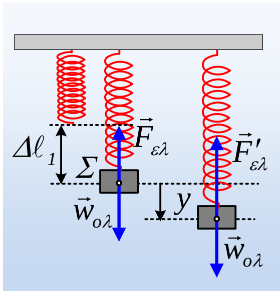
i) Στη θέση ισορροπίας της σφαίρας, το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell$, οπότε:

$$\Sigma F=0 \rightarrow k\,\Delta\ell = mg \rightarrow$$

$$k=\frac{mg}{\Delta\ell}=\frac{0{,}5\cdot 10}{0{,}1}N/m=50N/m$$

Μόλις αφήσουμε ελεύθερη την πλάκα, το σύστημα των δύο σωμάτων θα κινηθεί μαζί, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ουσιαστικά έχουμε ένα σώμα Σ, μάζας m+M, το οποίο είναι δεμένο στο κάτω άκρο ελατηρίου.

Για την θέση ισορροπίας του σώματος Σ έχουμε:



$$\Sigma F=0 \rightarrow k\,\Delta\ell_1=(m+M)g \rightarrow$$

$$\Delta\ell_1=\frac{(m+M)g}{k}=\frac{20}{50}m=0{,}4m$$

Παίρνοντας εξάλλου το σώμα σε μια τυχαία θέση, η οποία απέχει κατά y από την θέση ισορροπίας του, όπως στο διπλανό σχήμα, έχουμε:

$$\Sigma F= w_{o\lambda}-F'_{\varepsilon\lambda}=(m+M)g-k(\Delta\ell_1+y)=-ky$$

Συνεπώς το σώμα Σ, εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά D=k και πλάτος A= $\Delta\ell_1-\Delta\ell$ =0,4m-0,1m=0,3m, αφού το σώμα Σ ξεκινά την ταλάντωσή του με μηδενική ταχύτητα, συνεπώς η αρχική θέση, είναι ακραία θέση της ταλάντωσης.

Αλλά τότε σε κάθε θέση το σώμα Σ, συνεπώς και η σφαίρα, θα έχει επιτάχυνση:

$$\alpha=-\omega^2\cdot y=-\frac{D}{m+M}y=-\frac{k}{m+M}y$$

Με βάση αυτά, θεωρώντας την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική έχουμε:

$$a_{\alpha\rho}=-\frac{k}{m+M}y=-\frac{50}{2}0{,}3m/s^2=-7{,}5m/s^2$$

Αλλά τη στιγμή που η πλάκα φτάνει στο έδαφος, έχοντας διανύσει απόσταση 0,45m, η απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας θα είναι x=-0,15m, οπότε:

α) Ελάχιστα πριν την κρούση, η επιτάχυνση του συστήματος είναι:

$$a_1=-\frac{k}{m+M}y=-\frac{50}{2}(-0{,}15)m/s^2=+3{,}75m/s^2\,.$$

β) Αμέσως μετά την κρούση, η σφαίρα ξεκινά μια νέα ταλάντωση, γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας της, ενώ η απομάκρυνση, από τη θέση αυτή είναι y=-0,45m, οπότε η επιτάχυνση θα είναι:

$$a_2=-\frac{k}{m}y=-\frac{50}{0{,}5}(-0{,}45)m/s^2=+45m/s^2$$

ii) Η μέγιστη ταχύτητα του Σ, συνεπώς και της πλάκας, θα είναι:

$$\upsilon_{max}=\omega A=\sqrt{\frac{k}{m+M}}\cdot A=\sqrt{\frac{50}{2}}0{,}3m/s=1{,}5m/s$$

iii) Η ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική, είναι ίση με την κινητική ενέργεια της πλάκας.

Εφαρμόζοντας τη διατήρηση της ενέργειας για το σώμα Σ (το σύστημα των δύο σωμάτων) για τη θέση ελάχιστα πριν την κρούση, παίρνουμε:

$$E=K+U\rightarrow$$

$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}(m+M)\upsilon^2+\frac{1}{2}ky^2\rightarrow$$

$$\upsilon=\sqrt{\frac{k}{m+M}\left(A^2-y^2\right)}=\sqrt{\frac{50}{2}\left(0{,}3^2-0{,}15^2\right)}m/s=0{,}75\sqrt{3}m/s$$

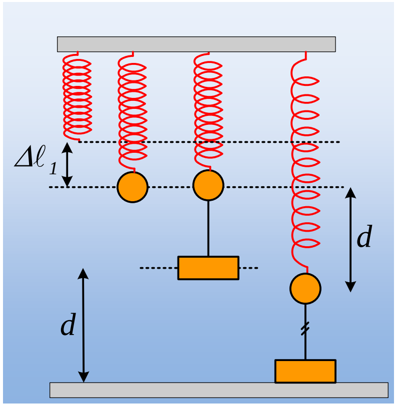
Όπου υ το μέτρο της ταχύτητας. Αλλά τότε παίρνουμε:

$$Q=K_{\pi\lambda}=\frac{1}{2}M\upsilon^2=\frac{1}{2}1{,}5\cdot\left(0{,}75\sqrt{3}\right)^2J\approx1{,}27J$$

iv) Η ενέργεια της νέας ταλάντωσης της σφαίρας είναι:

$$E=K+U=\frac{1}{2}m\upsilon^2+\frac{1}{2}kx_1^2\rightarrow$$

$$E=\frac{1}{2}0{,}5\cdot\left(0{,}75\sqrt{3}\right)^2J+\frac{1}{2}50\cdot(0{,}45)^2J=5{,}48J$$



Αφού τη στιγμή που κτυπά η πλάκα στο έδαφος (και κόβουμε το νήμα), η σφαίρα απέχει κατά d=45cm από την αρχική θέση ισορροπίας της, η οποία θα είναι και η θέση ισορροπίας της νέας ταλάντωσης που θα πραγματοποιήσει.

Σημείωση:

Το μήκος του νήματος δεν δίνεται, οπότε δεν μας ενδιαφέρει αν η σφαίρα θα κτυπήσει η όχι στο έδαφος. Έτσι και αλλιώς η κίνησή της μετά θα είναι ΑΑΤ, είτε τμήμα ΑΑΤ, της οποίας ζητάμε απλά την ενέργεια.

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης