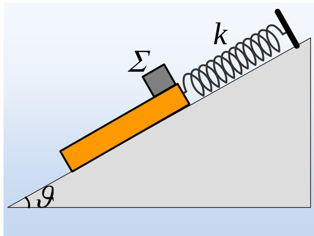
Η ταλάντωση της σανίδας λόγω τριβής.



Μια σανίδα μάζας Μ=2kg και μήκους ℓ, ηρεμεί σε λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως θ, δεμένη στο ένα άκρο της με το άκρο ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k=20N/m, όπως στο σχήμα. Σε μια στιγμή ($t_0=0$) αφήνουμε στο πάνω άκρο της, ένα σώμα Σ, μάζας m=1kg, αμελητέων διαστάσεων, το οποίο παρουσιάζει με τη σανίδα συντελεστές τριβής $\mu=\mu_s=3/8$.

i) Να δείξετε ότι το σώμα Σ θα ολισθήσει πάνω στη σανίδα, υπολογίζοντας στη συνέχεια και την επιτάχυνση που θα αποκτήσει.

ii) Να αποδείξτε ότι και η σανίδα θα κινηθεί, υπολογίζοντας την αρχική επιτάχυνση που θα αποκτήσει.

iii) Να αποδειχθεί ότι, για όσο χρόνο το σώμα Σ κινείται σε επαφή με τη σανίδα, αυτή εκτελεί αρμονική ταλάντωση, υπολογίζοντας την περίοδο και το πλάτος ταλάντωσης.

iv) Αν το Σ εγκαταλείπει τη σανίδα τη στιγμή t_1=1s, να βρεθούν:

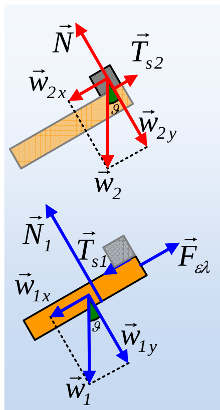
α) Το μήκος ℓ της σανίδας.

β) Η ενέργεια της νέας ταλάντωσης που θα πραγματοποιήσει η σανίδα, μετά την απομάκρυνση του σώματος Σ.

γ) Η μηχανική ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική κατά την κίνηση του σώματος Σ πάνω στη σανίδα.

Δίνονται ημθ=0,6, συνθ=0,8, $\pi^2\approx10$ και g=10m/s^2.

Απάντηση:



i) Στο διπλανό σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα Σ, μόλις αφεθεί πάνω στη σανίδα. Η δύναμη που τείνει να το κινήσει είναι η συνιστώσα του βάρους w_{2x}=mg·ημθ=1·10·0,6N=6N.

Αλλά τότε θα κάνει την εμφάνισή της η τριβή. Δεν ξέρουμε αν αυτή είναι στατική τριβή, ή τριβή ολίσθησης, οπότε το σώμα Σ θα κινηθεί πάνω στη σανίδα.

Έστω ότι η ασκούμενη τριβή μεταξύ των δύο σωμάτων είναι στατική, οπότε τα σώματα θα κινηθούν μαζί με την ίδια επιτάχυνση. Εφαρμόζοντας το 2^o νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα χωριστά και για τη στιγμή t_0 παίρνουμε:

$$\Sigma F_{x1}=M\alpha \rightarrow Mg\eta\mu\theta+T_{s1}-F_{\varepsilon\lambda}=M\alpha_0$$

$$\Sigma F_{x2}=m\alpha \rightarrow mg\eta\mu\theta-T_{s2}=m\alpha_0$$

Αρχικά η σανίδα ισορροπεί, έχοντας επιμηκύνει το ελατήριο κατά Δℓ, όπου:

$$\Sigma F_x=0 \rightarrow w_{1x}=F_{\varepsilon\lambda} \rightarrow \Delta\ell=\frac{Mg\cdot\eta\mu\theta}{k}=\frac{2\cdot10\cdot0{,}6}{20}m=0{,}6m$$

Με πρόσθεση κατά μέλη και λαμβάνοντας υπόψη ότι $T_{s1}=T_{s2}$ (ίσα μέτρα λόγω δράσης-αντίδρασης), ενώ Mg·ημθ=$F_{\varepsilon\lambda}$, παίρνουμε:

$$mg\cdot\eta\mu\theta=(M+m)a_0 \rightarrow$$

$$a_0 = \frac{mg \cdot \eta\mu\theta}{M+m} = \frac{1 \cdot 10 \cdot 0{,}6}{2+1} m/s^2 = 2m/s^2.$$

Αλλά τότε επιστρέφοντας στο σώμα Σ:

$$mg\eta\mu\theta - T_{s2} = m\alpha_0 \rightarrow$$

$$T_{s2} = mg \cdot \eta\mu\theta - m\alpha_0 = 1 \cdot 10 \cdot 0{,}6N - 1 \cdot 2N = 4N$$

ενώ η μέγιστη τιμή της στατικής τριβής, η οποία μπορεί να εμφανιστεί, η οριακή τριβή έχει μέτρο:

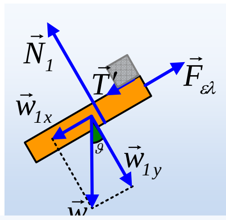
$$T_{o\rho} = \mu_s \cdot N_2 = \mu_s \cdot mg \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 3/8 \cdot 1 \cdot 10 \cdot 0{,}8N = 3N$$

αφού το σώμα ισορροπεί στην κάθετη προς το επίπεδο διεύθυνση και $\Sigma F_y=0$ ή $N_2=mg \cdot$συνθ.

Αλλά τότε δεν μπορεί να ασκηθεί στατική τριβή μεταξύ των σωμάτων μέτρου 4Ν και το σώμα Σ θα ολισθήσει πάνω στη σανίδα και η ασκούμενη τριβή, θα είναι τριβή ολίσθησης μέτρου $T_{o\lambda}=T=3N$.

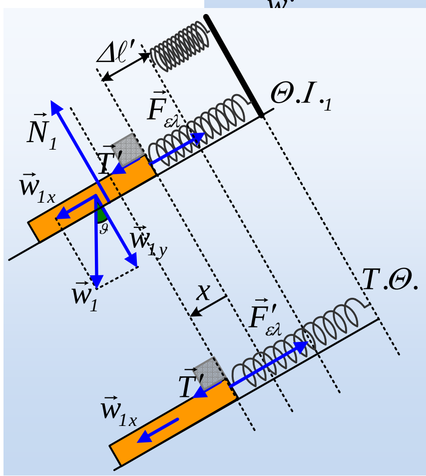
Τότε όμως:

$$\Sigma F_{2x} = m \cdot \alpha_2 \rightarrow \alpha_2 = \frac{w_{2x} - T}{m} = \frac{6-3}{1} m/s^2 = 3m/s^2.$$



ii) Στο διπλανό σχήμα, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στη σανίδα, μόλις τοποθετηθεί πάνω της το σώμα Σ. Από το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

$$\Sigma F_{1x} = m \cdot \alpha_{01} \rightarrow \alpha_{01} = \frac{w_{1x} - F_{\varepsilon\lambda} + T'}{m} = \frac{T'}{m} = \frac{3}{2} m/s^2 = 1{,}5m/s^2.$$



iii) Η επιτάχυνση που βρήκαμε παραπάνω για την σανίδα, δεν θα παραμείνει σταθερή, αφού κινούμενη προς τα κάτω, επιμηκύνεται περισσότερο το ελατήριο και αυξάνεται το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου, με αποτέλεσμα να μειώνεται η επιτάχυνση. Αλλά τότε κάποια στιγμή η σανίδα θα φτάσει σε μια θέση, όπου ΣF=0, μια νέα θέση ισορροπίας (Θ.Ι.$_1$) , για την οποία:

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow$$

$$w_{1x} + T' = F_{\varepsilon\lambda} \quad (1)$$

$$\Delta\ell' = \frac{Mg \cdot \eta\mu\theta + T'}{k} = \frac{12+3}{20} m = 0{,}75m$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η νέα θέση ισορροπίας είναι χαμηλότερα της προηγούμενης κατά:

$$d = \Delta\ell' - \Delta\ell = 0{,}75m - 0{,}6m = 0{,}15m.$$

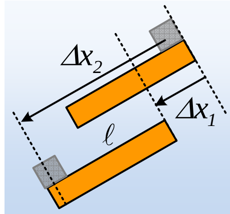
Έστω τώρα μια τυχαία θέση, η οποία απέχει κατά x, από την Θ.Ι.$_1$. Με θετική φορά προς τα κάτω έχουμε:

$$\Sigma F_x = w_{1x} + T' - F'_{\varepsilon\lambda} = w_{1x} + T' - k(\Delta\ell' + x) \xrightarrow{(1)} \Sigma F_x = -kx^*$$

Συνεπώς η σανίδα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς k, με πλάτος A_1=0,15m (αφού ξεκίνησε από ακραία θέση, η οποία απέχει κατά 0,15m από την θέση ισορροπίας) και περίοδο:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2}{20}} s = 2s$$

iv) α) Μέχρι τη στιγμή t_1=1s, το σώμα Σ έχει μετατοπισθεί κατά:



$$\Delta x_2 = \frac{1}{2}a_2 t_1^2 = \frac{1}{2}3\cdot 1^2\, m = 1{,}5m$$

ενώ αφού το χρονικό αυτό διάστημα είναι ίσο με μισή περίοδο, η σανίδα ξεκινώντας από μια ακραία θέση, φτάνει στην άλλη ακραία θέση της, μετατοπισμένη κατά Δx_1=A+A=0,3m. Αλλά τότε με βάση το διπλανό σχήμα έχουμε:

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 + \ell \rightarrow \ell = \Delta x_2 - \Delta x_1 = 1{,}5m - 0{,}3m = 1{,}2m$$

β) Τη στιγμή που το Σ εγκαταλείπει τη σανίδα, αυτή απέχει από την αρχική θέση ισορροπίας της κατά:

$$d_1 = 2A_1 = 0{,}3m$$

χωρίς να έχει ταχύτητα. Συνεπώς θα επακολουθήσει μια απλή αρμονική ταλάντωση, γύρω από την αρχική θέση ισορροπίας της με πλάτος Α=0,3m. Αλλά τότε η ενέργεια της ταλάντωσης είναι:

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}20\cdot 0{,}3^2\, J = 0{,}9J$$

γ) Το έργο της τριβής που ασκείται στο σώμα Σ, μετράει την ενέργεια που αφαιρείται από το σώμα Σ και είναι ίσο με:

$$W_T = -T\cdot \Delta x_2 = -3\cdot 1{,}5J = -4{,}5J$$

Εξάλλου το έργο της τριβής που ασκείται στη σανίδα:

$$W_{T'} = +T'\cdot \Delta x_1 = 3\cdot 0{,}3J = 0{,}9J$$

Και μετράει την ενέργεια που μεταφέρεται στη σανίδα. Αλλά τότε η μηχανική ενέργεια που αφαιρείται από το σώμα Σ, χωρίς να μεταφέρεται ως μηχανική ενέργεια στη σανίδα, είναι ίση με:

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = |W_T| - |W_{T'}| = 4{,}5J - 0{,}9J = 3{,}6J$$

Το παραπάνω ποσό ενέργειας εμφανίζεται ως θερμική αυξάνοντας την εσωτερική ενέργεια των δύο σωμάτων και η οποία τελικά μεταφέρεται στην ατμόσφαιρα με τη μορφή της θερμότητας, λόγω διαφοράς θερμοκρασίας.

Σχόλιο για Καθηγητές:

Η εξίσωση $\Sigma F_x = -kx$ την οποία βρήκαμε για τη σανίδα με την επίδραση της τριβής Τ΄ δεν είναι τίποτα άλλο από την διαφορική εξίσωση: $Ma = -kx$ ή $M\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$ η λύση της οποίας έχει τη μορφή $x = A\cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_0)$, πράγμα που σημαίνει ότι η κίνηση είναι αρμονική. Δεν την ονόμασα βέβαια ΑΑΤ, αφού δεν μπορούμε να αποδώσουμε δυναμική ενέργεια που να συνδέεται με την τριβή ολίσθησης που ασκείται στη σανίδα!

Υλικό Φυσικής-Χημείας
Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης